Matematik UVMs Trinmål synoptisk fremstillet

Matematiske kompetencer

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
• indgå i dialog om spørgsmål og svar, som er karakteristiske i arbejdet med matematik (tankegangskompetence)	• formulere sig skriftligt og mundtligt om matematiske påstande og spørgsmål og have blik for hvilke typer af svar, der kan forventes (tankegangskompetence)	• skelne mellem definitioner og sætninger, mellem enkelttilfælde og generaliseringer og anvende denne indsigt til at udforske og indgå i dialog om forskellige matematiske begrebers rækkevidde og begrænsning (tankegangskompetence)
• løse matematiske problemer knyttet til en kontekst, der giver mulighed for intuitiv tænkning, inddragelse af konkrete materialer eller egne repræsentationer (problembehandlingskompetence)	• løse matematiske problemer knyttet til en kontekst, der giver mulighed for intuitiv tænkning, egne repræsentationer og erhvervet matematisk viden og kunnen (problembehandlingskompetence)	• opstille, afgrænse og løse både rent faglige og anvendelsesorienterede matematiske problemer og vurdere løsningerne, bl.a. med henblik på at generalisere resultater (problembehandlingskompetence)
• opstille, behandle og afkode enkle modeller, der gengiver træk fra virkeligheden, bl.a. vha. regneudtryk, tegninger og diagrammer (modelleringskompetence)	• opstille, behandle, afkode og analysere enkle modeller, der gengiver træk fra virkeligheden, bl.a. ved hjælp af regneudtryk, tegninger, diagrammer (modelleringskompetence)	• opstille, behandle, afkode, analysere og forholde sig kritisk til modeller, der gengiver træk fra virkeligheden, bl.a. ved hjælp af regneudtryk, tegning, diagrammer, ligninger, funktioner og formler (modelleringskompetence)
• ræsonnere og argumentere intuitivt om konkrete matematiske aktiviteter og følge andres mundtlige argumenter (ræsonnementskompetence)	• udtænke og gennemføre uformelle og enkle formelle matematiske ræsonnementer og følge mundtlige og enkle skriftlige argumenter (ræsonnementskompetence)	• udtænke, gennemføre, forstå og vurdere mundtlige og skriftlige matematiske ræsonnementer og arbejde med enkle beviser (ræsonnementskompetence)
• bruge uformelle	• bruge uformelle og formelle	• afkode, bruge og vælge

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
repræsentationsformer sammen med symbolsprog og arbejde med deres indbyrdes forbindelser (repræsentationskompetence)	repræsentationsformer og forstå deres indbyrdes forbindelser (repræsentationskompetence)	hensigtsmæssigt mellem forskellige repræsentationsformer og kunne se deres indbyrdes forbindelser (repræsentationskompetence)
• afkode og anvende enkle matematiske symboler, herunder tal og regnetegn, samt forbinde dem med dagligdags sprog (symbolbehandlingskompetence)	• afkode og anvende matematiske symboler, herunder variable og enkle formler samt oversætte mellem dagligsprog og symbolsprog (symbolbehandlingskompetence)	• forstå og benytte variable og symboler, bl.a. når regler og sammenhænge skal vises, samt oversætte mellem dagligsprog og symbolsprog (symbolbehandlingskompetence)
• udtrykke sig og indgå i dialog om enkle matematiske problemstillinger (kommunikationskompetence)	• sætte sig ind i og udtrykke sig såvel mundtligt som skriftligt om fremgangsmåder og løsninger i forbindelse med matematiske problemstillinger (kommunikationskompetence)	• indgå i dialog samt udtrykke sig mundtligt og skriftligt om matematikholdige anliggender på forskellige måder og med en vis faglig præcision, samt fortolke andres matematiske kommunikation (kommunikationskompetence)
• kende og anvende hensigtsmæssige hjælpemidler, herunder konkrete materialer, lommeregner og it, bl.a. til eksperimenterende udforskning af matematiske sammenhænge (hjælpemiddelkompetence)	• kende, vælge og anvende hensigtsmæssige hjælpemidler, herunder konkrete materialer, lommeregner og it, bl.a. til eksperimenterende udforskning af matematiske sammenhænge (hjælpemiddelkompetence)	• kende forskellige hjælpemidler, herunder it, og deres muligheder og begrænsninger, samt anvende dem hensigtsmæssigt, bl.a. til eksperimenterende udforskning af matematiske sammenhænge, til beregninger og til præsentationer (hjælpemiddelkompetence)

Matematiske emner - i arbejdet med tal og algebra

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
• kende de naturlige tals opbygning og	• kende til de rationale tal	• kende de reelle tal og anvende

Trinmål efter 3. klassetrin	**Trinmål efter 6. klassetrin**	**Trinmål efter 9. klassetrin**
ordning, herunder titalssystemet		dem i praktiske og teoretiske sammenhænge
• bruge tælleremser og arbejde med talfølger og figurrækker	• kende tallenes ordning, tallinjen og titalssystemet	• arbejde med talfølger og forandringer med henblik på at undersøge, systematisere og generalisere
	• undersøge og systematisere i forbindelse med arbejdet med talfølger og figurrækker	
• deltage i udvikling af metoder til addition og subtraktion på baggrund af egen forståelse	• deltage i udvikling af metoder til multiplikation og division på baggrund af egen forståelse	
• bestemme antal ved hjælp af addition, subtraktion samt enkel multiplikation og division inden for de naturlige tal	• anvende de fire regningsarter til antalsbestemmelse ved hjælp af hovedregning, lommeregner, it og skriftlige beregninger	• regne med brøker, bl.a. i forbindelse med løsning af ligninger og algebraiske problemer
• løse konkrete problemer ved hjælp af hovedregning, lommeregner, it og enkle skriftlige beregninger	• kende procentbegrebet og bruge enkel procentregning	• forstå og anvende procentbegrebet
• kende eksempler på brug af decimaltal og enkle brøker fra hverdagssituationer	• anvende brøker, decimaltal og procent i praktiske sammenhænge	• kende regningsarternes hierarki samt begrunde og anvende regneregler
	• kende sammenhængen mellem brøker, decimaltal og procent	

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
	• anvende regningsarternes hierarki	
	• kende til eksempler på brug af variable, bl.a. i formler, enkle ligninger og funktioner	• forstå og anvende formler og matematiske udtryk, hvori der indgår variable
	• finde løsninger til enkle ligninger ved uformelle metoder	
		• anvende funktioner til at beskrive sammenhænge og forandringer
		• arbejde med funktioner i forskellige repræsentationer
		• løse ligninger og enkle ligningssystemer og ved inspektion løse enkle uligheder
	• kende til koordinatsystemet, herunder sammenhængen mellem tal og tegning	• bestemme løsninger til ligninger og ligningssystemer grafisk

Matematiske emner - i arbejdet med geometri

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
• tale om dagligdags ting og billeder i et uformelt geometrisk sprog med udgangspunkt i former, størrelser og beliggenhed	• benytte geometriske metoder og begreber til beskrivelse af fysiske objekter fra dagligdagen	• kende og anvende forskellige geometriske figurers egenskaber
• arbejde med enkle, konkrete modeller	• undersøge og konstruere enkle	• fremstille skitser og tegninger efter

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
og gengive træk fra virkeligheden ved tegning	figurer i planen	givne forudsætninger
• undersøge og beskrive mønstre, herunder symmetri	• kende grundlæggende geometriske begreber som linjer, vinkler, polygoner og cirkler	• benytte grundlæggende geometriske begreber, herunder størrelsesforhold og linjers indbyrdes beliggenhed
• foretage enkel måling af afstand, flade, rum og vægt	• spejle, dreje og parallelforskyde, bl.a. i forbindelse med arbejdet med mønstre	• undersøge, beskrive og vurdere sammenhænge mellem tegning (model) og tegnet objekt
• undersøge og eksperimentere inden for geometri, bl.a. med brug af it og konkrete materialer	• arbejde med tredimensionelle modeller og enkle tegninger af disse	• kende og anvende målestoksforhold, ligedannethed og kongruens
	• arbejde med enkle eksempler på målestoksforhold og ligedannethed i forbindelse med tegning	• kende og anvende målingsbegrebet, herunder måling og beregning i forbindelse med omkreds, flade og rum
	• undersøge metoder til beregning af omkreds, areal og rumfang i konkrete situationer	• udføre enkle geometriske beregninger, bl.a. ved hjælp af Pythagoras' sætning
	• bruge it til at undersøge og konstruere geometriske figurer	• arbejde undersøgende med enkel trigonometri i forbindelse med retvinklede trekanter og beregne sider og vinkler
		• arbejde med enkle geometriske argumenter og beviser

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
		• bruge it til tegning, undersøgelser, beregninger og ræsonnementer vedrørende geometriske figurer
• arbejde med sammenhænge mellem tal og geometri ved hjælp af tallinjen	• arbejde med koordinatsystemet og opnå en begyndende forståelse for sammenhængen mellem tal og geometri	• arbejde med koordinatsystemet og forstå sammenhængen mellem tal og geometri
• forbinde tal og regning med geometriske repræsentationer og konkrete materialer	• forbinde tal og regning med geometriske repræsentationer	• gengive algebraiske sammenhænge i geometrisk repræsentation

Matematiske emner - i arbejdet med statistik og sandsynlighed

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
• indsamle, ordne og behandle data	• indsamle, behandle og formidle data, bl.a. i tabeller og diagrammer	• anvende statistiske begreber til beskrivelse, analyse og fortolkning af data
	• gennemføre enkle statistiske undersøgelser	• tilrettelægge og gennemføre enkle statistiske undersøgelser
	• læse, beskrive og tolke data og informationer i tabeller og diagrammer	• læse, forstå og vurdere anvendelsen af statistik og sandsynlighed i forskellige medier
• opnå erfaringer med tilfældighed og chance i eksperimenter og spil	• udføre eksperimenter, hvori tilfældighed og chance indgår	• udføre og tolke eksperimenter, hvori tilfældighed og chance indgår
		• forbinde sandsynlighed med tal vha. statistik, enkle kombinatoriske overvejelser og simple

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
		modeller

Matematik i anvendelse

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
• bruge matematik i relevante hverdagssituationer	• arbejde med enkle problemstillinger fra dagligdagen, det nære samfundsliv og naturen	• arbejde med problemstillinger vedrørende dagligdagen, bl.a. i forbindelse med privatøkonomi, bolig og transport
		• behandle eksempler på problemstillinger knyttet til den samfundsmæssige udvikling, hvori bl.a. økonomi, teknologi og miljø indgår
• vælge og benytte regningsart i forskellige praktiske sammenhænge	• anvende faglige redskaber og begreber, bl.a. beregningsmetoder, enkle procentberegninger og grafisk afbildning til løsningen af praktiske problemer	• anvende faglige redskaber og begreber, bl.a. procentberegninger, formler og funktioner som værktøj til løsning af praktiske problemer
		• udføre simuleringer, bl.a. ved hjælp af it
• erhverve en begyndende forståelse for matematik som beskrivelsesmiddel	• se matematikkens muligheder og begrænsninger som beskrivelsesmiddel	• erkende matematikkens muligheder og begrænsninger som beskrivelsesmiddel og beslutningsgrundlag

Matematiske arbejdsmåder

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
• deltage i udvikling af metoder med støtte i bl.a. konkrete materialer og illustrationer	• deltage i udvikling af metoder med støtte i bl.a. skriftlige notater og illustrationer	• deltage i udvikling af strategier og metoder med støtte i bl.a. it
• arbejde eksperimenterende og undersøgende med inddragelse af konkrete materialer	• undersøge, systematisere og begrunde matematisk med mulighed for inddragelse af konkrete materialer og andre repræsentationer samt ved brug af it	• undersøge, systematisere og ræsonnere med henblik på at generalisere
		• veksle mellem praktiske og teoretiske overvejelser ved løsningen af matematiske problemstillinger
• modtage, arbejde med og videregive enkle skriftlige og mundtlige informationer, som indeholder matematikfaglige udtryk	• læse enkle faglige tekster samt anvende og forstå informationer, som indeholder matematikfaglige udtryk	• læse faglige tekster samt forstå og forholde sig til informationer, som indeholder matematikfaglige udtryk
	• forberede og gennemføre mindre præsentationer af eget arbejde med matematik	• forberede og gennemføre mundtlige og skriftlige præsentationer af eget arbejde med matematik, bl.a. med inddragelse af it
• arbejde individuelt og sammen med andre om løsning af praktiske problemstillinger og matematiske opgaver	• arbejde individuelt og sammen med andre om praktiske og teoretiske problemstillinger, problemløsning samt øvelser	• arbejde individuelt og sammen med andre om praktiske og teoretiske problemstillinger, bl.a. i projektorienterede forløb

Trinmål efter 3. klassetrin	Trinmål efter 6. klassetrin	Trinmål efter 9. klassetrin
		• arbejde individuelt og sammen med andre om problemløsning i mundtligt og skriftligt arbejde
• indgå i dialog om matematik, hvor elevernes forskellige ideer inddrages	• arbejde med problemløsning i en proces, hvor andres forskellige forudsætninger og ideer inddrages	• give respons til andre i arbejdet med matematik, bl.a. ved at spørge aktivt

Ministeriets læseplan for faget matematik

1. forløb 1.-3. klassetrin

Undervisningen skal bygge på de mange forudsætninger og potentialer, eleverne har med sig fra børnehaveklassens ikke-fagopdelte undervisning. Eksempelvis benytter eleverne tal i forbindelse med dagligdags begivenheder. De har erfaring med at beskrive ting og oplevelser ved at tegne, og de er i stand til at forstå informationer, som indeholder matematikfaglige udtryk. De tæller og deler, de bygger med klodser, der passer sammen, eller som netop ikke passer, de kender forskellige former og figurer, de spiller computerspil.
Eleverne bygger med lærerens støtte videre på deres forskellige matematikrelevante erfaringer, bl.a. ved at deltage i lege, spil og undersøgelser på skolen og i dens omgivelser. Det er lærerens opgave at planlægge og gennemføre en undervisning, der sigter på, at de enkelte elever gradvist udvikler deres intuitive matematikforståelse til matematisk begrebsdannelse.
I planlægningen må læreren have indhold, kompetencer og arbejdsmåder i spil på samme tid. Der sigtes på den måde mod udvalgte målsætninger fra flere CKF-områder i samme undervisningsforløb. Det er derfor vigtigt, at målsætningerne kan “spille sammen”. For eksempel kan et undervisningsforløb i 1.-3. klasse, der indholdsmæssigt sigter på elevernes udvikling af metoder til addition,
på samme tid sigte mod elevernes udvikling af problem og symbolbehandlingskompetence og på elevernes evner til at samarbejde med andre om at løse problemer ved hjælp af matematik.
Matematiske kompetencer
Den kompetencebaserede beskrivelse af matematisk faglighed er et alsidigt redskab i planlægningen og gennemførelsen af undervisningen på alle klassetrin.
I planlægningen fungerer kompetencebeskrivelsen dels til at fastsætte de dele af undervisningens mål, der vedrører de matematiske kompetencer, dels til valg af *indhold*.
I gennemførelsen fungerer beskrivelsen dels til at vælge forskellige *tilgange* til det samme indhold, dels til at *perspektivere* indholdet.
Kompetencebeskrivelsernes betydning for lærerens planlægning af *mål* og *indhold* og for lærerens *tilgange* til og *perspektiver* på indholdet i undervisningssituationen uddybes i det følgende.
Undervisningens mål og indhold skal give eleverne mulighed for at bygge videre på de matematiske kompetencer, som de har ved skolestart, og som de efterhånden videreudvikler i skolen. Læreren må således overveje i planlægningen, hvordan mål og indhold tager hensyn til forskellige elevers forudsætninger og potentialer. Oftest vil det være hensigtsmæssigt at vælge “brede” mål og et “bredt” indhold for klassen som helhed, mens der til de enkelte elever kan knyttes mere specifikke forventninger.
Det er ofte hensigtsmæssigt at vælge aktiviteter, hvor flere kompetencer kommer i spil på samme tid. Sådanne aktiviteter kan bl.a. have form af undersøgelser, lege, spil og problemløsningsopgaver. Aktiviteterne skal rumme problemstillinger, der giver eleverne mulighed for at inddrage konkrete materialer og andre uformelle repræsentationsformer samt giver anledning til dialog om og med matematik. På den måde sigtes mod elevernes udvikling af *problembehandlings-*, *repræsentations-* og *kommunikationskompetence*.
Kompetencebeskrivelserne kan betragtes som forskellige tilgange til og perspektiver på det samme indhold. For eksempel kan en elev, der arbejder med udvikling af metoder til antalsbestemmelse, udfordres på både problembehandlings-, repræsentations- og

kommunikationskompetencen ved, at læreren stiller åbne spørgsmål, der sigter på de forskellige kompetencer. I spørgsmål til den enkelte elev kan læreren tage udgangspunkt i netop denne elevs forudsætninger og potentialer.
Det er især gennem dialogen, at eleven, med lærerens støtte, får mulighed for efterhånden at videreudvikle *tankegangs*- og *ræsonnementskompetence*. På 1.-3. klassetrin er det bl.a. spørgsmål som "Hvad nu hvis…?", "Mon det går sådan, fordi…?", "Hvor mange forskellige løsninger kan du finde?", "Hvordan kan du vide at…?", der danner baggrund, når læreren fokuserer på den enkelte elevs tankegangs- og ræsonnementskompetence.
Det er ved at arbejde med forbindelserne mellem uformelle repræsentationsformer og matematiske symboler, at eleven efterhånden udvikler *symbolbehandlingskompetence*. På 1.-3. klassetrin arbejder eleverne fx med forbindelsen mellem konkrete materialer, illustrationer, spring på tallinjen, situationer og regneudtryk, hvori symbolet for subtraktion indgår.
Problemløsning, dialog og en alsidig anvendelse af repræsentationer kan betragtes som udgangspunktet for undervisningen både med sigte på udforskning af matematiske sammenhænge og med sigte på at udvikle elevernes *modelleringskompetence*.
På 1.-3. klassetrin bruges mange konkrete materialer i undervisningen, og efterhånden inddrages flere hjælpemidler, herunder lommeregner og it, med henblik på elevernes udvikling af *hjælpemiddelkompetence*.
Matematiske emner
Arbejdet med tal og algebra
I begyndelsen af forløbet udbygger eleverne deres forskellige talforståelser og kendskab til sammenhængen mellem antal, talord og talsymboler. Det kan ske gennem aktiviteter, der både kan tage udgangspunkt i lærerens oplæg, i elevernes hverdagsoplevelser, i deres fortællinger eller i en fantasiverden. Aktiviteterne kan have form af undersøgelser, lege, spil, og problemløsningsopgaver. I aktiviteterne skal indgå

- optælling
- tælleremser
- antalsbestemmelse ved addition og subtraktion
- begreberne "flest" og "færrest"
- begreberne "det dobbelte" og "halvdelen"
- deling af antal
- regnehistorier
- talfølger
- helt enkle brøker og decimaltal, som eleverne møder i dagligdagen
- praktiske og virkelighedsnære problemstillinger
- matematik fra hverdagssituationer.

Der indgår brug af lommeregner og it, når det er hensigtsmæssigt.
I arbejdet med udvikling af metoder til antalsbestemmelse lægges hovedvægten på addition og subtraktion. Der inddrages et alsidigt udvalg af uformelle repræsentationsformer. Arbejdets overordnede sigte er øget talforståelse. Det omfatter både hovedregning og regning med skriftlige notater.
Udgangspunktet er elevernes uformelle regnestrategier, der udfordres af læreren og videreudvikles sammen med eleverne. Lærerens fokus i denne videreudvikling er den enkelte elevs stigende indsigt i tallene, talsystemets egenskaber og forståelse af regningsarterne. Det er

således centralt, at læreren ved løsning af matematiske problemstillinger støtter den enkelte elev i at beskæftige sig med talforståelse i stedet for med procedurer for opstilling og udregning. Der sigtes ikke mod opøvelsen af standardiserede algoritmer.
Elevens udvikling sker gennem dialog og gennem arbejdet med hensigtsmæssige øvelser. I dialogen indgår spørgsmål som

- Hvor er der flest/færrest…?
- Hvor mange…?
- Hvor mange mangler du, for at…?
- Hvor mange er der tilbage, hvis…?
- Hvor stor er forskellen på…?
- Hvad er det dobbelte/halve af…?
- Hvor mange kan vi få hver, hvis…?
- Hvordan fandt du ud af det?

Den øgede fortrolighed med tal er det konkrete grundlag for det senere arbejde med algebra og for anvendelse af tal i alle de sammenhænge, hvor vi støder på dem.

Arbejdet med geometri

Geometrien indledes med iagttagelser af og samtaler om dagligdags ting og fænomener. Arbejdet tager udgangspunkt i den viden og kunnen, eleverne har erhvervet i børnehaveklassens ikke-fag-opdelte undervisning.
Eleverne skal arbejde med

- gengivelse af træk fra virkeligheden gennem tegning
- bygning med konkrete materialer
- geometriske begreber som størrelse, form og symmetri
- ordning af ting efter form, størrelse og andre egenskaber
- måling af afstand, flade, rum og vægt
- undersøgelser, eksperimenter og problemløsning inden for geometri
- sammenhængen mellem geometri og tal.

It kan indgå i dette arbejde.
Gennem arbejdet med rumlige figurer får de mulighed for at videreudvikle deres rumlige fornemmelse.
Geometriens centrale begreber bringes i spil gennem dialog med spørgsmål som

- Hvad fortæller din tegning?
- Hvilke former har tingene i klasseværelset?
- Kan du gøre din tegning dobbelt så stor?
- Hvorfor er dette mønster symmetrisk?

Indledende aktiviteter med måling af afstand, flade, rum og vægt med ikke-standardiserede og standardiserede enheder er vigtige aktiviteter i første forløb. Disse aktiviteter er det konkrete udgangspunkt for et senere arbejde med måling og beregning af længder, areal og rumfang.
Arbejdet med geometri omfatter undersøgelser, eksperimenter og problemløsning med udgangspunkt i konkrete materialer. I undervisningen skal indgå dialog med eleverne om deres problemløsning, således at de får mulighed for at forklare, hvad de har gjort, og hvad de har tænkt.

Undersøgelser og eksperimenter inden for geometri er på længere sigt bl.a. rettet mod elevernes arbejde med systematik, generalisering og argumentation. Det er i et sådant undersøgende arbejde, at eleverne finder ud af, hvilken slags spørgsmål der er karakteristiske for matematik (tankegangskompetence). Læreren må støtte og udfordre elevernes begyndende argumentation (ræsonnementskompetence) i forbindelse med de undersøgende aktiviteter.

Eleverne arbejder med tallinjen, så de kan se, at tal kan forbindes med punkter, og at det er muligt at beskrive længder med tal og tal med længder. Arbejdet med geometri og tal bør i det hele taget spille sammen i undervisningen, da geometri kan støtte talforståelsen. For eksempel kan rektangler illustrere multiplikation, og dette kan danne grundlaget for det videre arbejde med multiplikation på mellemtrinnet og med algebra i overbygningen.

Arbejdet med statistik og sandsynlighed

Eleverne arbejder med indsamling af data, der vedrører eleverne selv, deres nærmeste omgivelser samt spil og eksperimenter, der indgår i undervisningen. De indsamlede data ordnes, beskrives og behandles. I forbindelse med ordningen af data indgår

- optælling
- sortering
- tabeller
- enkle diagrammer.

It kan anvendes i dette arbejde.

I forbindelse med beskrivelsen af data indgår dialog om observationerne i et sprogbrug, der ligger tæt på elevernes hverdagssprog.

Dialogen skal bl.a. omfatte begreberne

- flest
- færrest
- størst
- mindst.

Desuden undersøger eleverne, hvor mange forskellige data, der er observeret.

I forbindelse med tolkningen af data indgår dialog om tilfældighed og chance. I dialogen indgår hverdagsspørgsmål som

- Er chancen stor eller lille?
- Hvad er der størst/mindst chance for?
- Mon det er tilfældigt?
- Hvad forventer I, der vil ske…?
- Hvordan tror I, det vil gå, hvis vi laver flere forsøg?

Dialogen bygger på elevernes intuitive chancebegreb og er på længere sigt rettet mod deres grundlæggende forståelse af det statistiske sandsynlighedsbegreb.

Matematik i anvendelse

Undervisningen skal veksle mellem at tage udgangspunkt i

- matematikfaglige problemstillinger, hvor matematikkens anvendelser inddrages
- anvendelsessammenhænge, hvor matematikken indgår.

Matematik i anvendelse betragtes således dels som et område, hvor de matematiske emner kommer i spil, dels som et område, hvor matematikkens anvendelse danner grundlag for indsigt og erkendelse.
Der fokuseres på de anvendelser af matematik, som eleverne kan møde i dagligdagen. Undervisningen skal fra starten af forløbet forankres i arbejdet med matematikholdige situationer. Det kan både være reelle situationer fra elevernes omgivelser og dagligdag og tilrettelagte situationer af hverdagslignende karakter.
Gennem arbejdet får eleverne mulighed for at udvikle strategier til løsning af enkle problemstillinger. For eksempel kan eleverne udvikle strategier for subtraktion i forbindelse med at give penge tilbage. Elevernes forskellige strategier kan efterfølgende være genstand for dialog.
Matematiske arbejdsmåder
De matematiske arbejdsmåder vedrører både undervisningens indhold og arbejdsformer.
Undervisningens indhold skal vælges, så eleverne får mulighed for at deltage i udviklingen af metoder og arbejde eksperimenterende og undersøgende. Senere i forløbet arbejder eleverne med enkle informationer, som indeholder matematikfaglige udtryk.
Arbejdsformerne skal omfatte gruppearbejde, hvor en af hensigterne er, at eleverne samarbejder med andre om at løse problemer, hvor matematik benyttes.
Dialogen er et vigtigt redskab i de matematiske arbejdsmåder. Igennem dialogen skal eleverne have mulighed for at ræsonnere. Eleverne kan bl.a. behandle spørgsmål som

- Hvordan går det, hvis…?
- Hvad, hvis ikke…?
- Mon det er sådan, fordi…?

2. forløb 4.-6. klassetrin

Hverdagserfaringer og de erfaringer, eleverne får i skolen, er fortsat udgangspunktet for undervisningen.
Eleverne bygger med lærerens støtte videre på deres forskellige matematikrelevante erfaringer, bl.a. ved at engagere sig i undersøgelser, opgaver og spil, hvor der arbejdes både mundtligt og skriftligt.
Det er lærerens opgave at planlægge og gennemføre en undervisning, der sigter på, at de enkelte elever gradvist udvikler deres intuitive matematikforståelse til matematisk begrebsdannelse.
I planlægningen må læreren have indhold, kompetencer og arbejdsmåder i spil på samme tid. Der sigtes på den måde mod udvalgte målsætninger fra flere CKF-områder i samme undervisningsforløb. Det er derfor vigtigt, at målsætningerne kan "spille sammen". For eksempel kan et undervisningsforløb i 4.-6. klasse, der indholdsmæssigt sigter på elevernes udvikling af metoder til division, på samme tid sigte mod elevernes udvikling af problemog symbolbehandlingskompetence og på elevernes evner til at samarbejde med andre om at løse problemer ved hjælp af matematik.
Matematiske kompetencer
Den kompetencebaserede beskrivelse af matematisk faglighed er et alsidigt redskab i planlægningen og gennemførelsen af undervisningen på alle klassetrin.

I planlægningen fungerer kompetencebeskrivelsen dels til at fastsætte de dele af undervisningens mål, der vedrører de matematiske kompetencer, dels til valg af *indhold*.
I gennemførelsen fungerer kompetencebeskrivelsen dels til at vælge forskellige *tilgange* til det samme indhold, dels til at *perspektivere* indholdet.
Kompetencebeskrivelsernes betydning for lærerens planlægning af *mål* og *indhold* og for lærerens *tilgange* og *perspektiver* på indholdet i undervisningssituationen uddybes i det følgende.
Undervisningens mål og indhold skal give eleverne mulighed for at bygge videre på de matematiske kompetencer, de har erhvervet i og uden for skolesammenhæng. Læreren må således overveje i planlægningen, hvordan mål og indhold tager hensyn til forskellige elevers forudsætninger og potentialer. Oftest vil det være hensigtsmæssigt at vælge "brede" mål og et "bredt" indhold for klassen som helhed, mens der til de enkelte elever kan knyttes mere specifikke forventninger.
Det vil ofte være hensigtsmæssigt at vælge aktiviteter, hvor flere kompetencer kommer i spil på samme tid. Sådanne aktiviteter kan bl.a. have form af undersøgelser, spil og problemløsnings-opgaver, hvor der arbejdes både mundtligt og skriftligt. Aktiviteterne skal rumme problemstillinger, der giver eleverne mulighed for at inddrage uformelle repræsentationsformer sammen med enkle formelle repræsentationsformer og allerede etableret viden og kunnen.
Aktiviteterne må give anledning til dialog om og med matematik. På den måde sigtes mod elevernes udvikling af *problembehandlings-*, *repræsentations-* og *kommunikationskompetence*.
Det er især igennem dialogen om ovennævnte type problemstillinger, at læreren kan udfordre elever, der arbejder med det samme faglige indhold, på forskellige måder. I den forbindelse kan kompetencebeskrivelserne med fordel betragtes som forskellige tilgange til og perspektiver på det samme indhold. Fx kan en elev, der arbejder med sammenhængen mellem brøk, decimaltal og procent, udfordres på både problembehandlings-, repræsentations- og kommunikationskompetencen ved, at læreren stiller åbne spørgsmål, der sigter på de forskellige kompetencer.
I spørgsmål til den enkelte elev kan læreren tage udgangspunkt i netop denne elevs forudsætninger og potentialer.
Det er også gennem dialogen, at eleven, med lærerens støtte, får mulighed for efterhånden at videreudvikle *tankegangs-* og *ræsonnementskompetence*, herunder skelne mellem forskellige slags matematiske udsagn og gennemføre enkle formelle ræsonnementer til begrundelse af matematiske påstande.
Det er ved fortsat at arbejde med forbindelserne mellem uformelle repræsentationsformer og matematiske symboler, at eleven efterhånden udvikler *symbolbehandlingskompetence*. På 4.-6. klassetrin arbejder eleverne fx med forbindelsen mellem tegninger, illustrationer, konkrete materialer og udtryk, hvori symbolerne for brøk, decimaltal og procent indgår.
Problemløsning, dialog og alsidig anvendelse af repræsentationer kan fortsat betragtes som udgangspunktet for undervisningen både med sigte på at undersøge, beskrive og analysere matematiske sammenhænge og med sigte på at udvikle elevernes *modelleringskompetence*.
På 4.-6. klassetrin bruges fortsat mange konkrete materialer i undervisningen. Lommeregner, it og andre hjælpemidler spiller en stadig større rolle. Det er vigtigt, at eleverne anvender forskellige hjælpemidler med henblik på at kunne vælge og anvende dem på en hensigtsmæssig måde. Hermed udvikler eleverne deres *hjælpemiddelkompetence*.

Matematiske emner

Arbejdet med tal og algebra
I 4.-6. klasse introduceres de negative tal og de rationale tal. Dette giver nye udfordringer i forbindelse med tallenes ordning, tallinjen og positionssystemet.
Talområdet kommer således bl.a. til at omfatte brøktal og decimaltal. Eleverne kender eksempler på brugen af brøker og decimaltal fra hverdagen. Begrebsdannelsen tager udgangspunkt i disse eksempler og støttes af illustrationer og konkrete materialer.
Brøkbegrebet er fundamentet i arbejdet med både brøk, decimaltal og procent og i beskrivelsen af forhold. Det er vigtigt, at eleverne får tid til denne begrebsdannelse – især fordi brøkers egenskaber er så anderledes end de naturlige tals egenskaber, der har udgjort fundamentet for deres arbejde med tal og algebra i 1.-3. klasse.
Arbejdet med brøkbegrebet i 4.-6. klasse omfatter bl.a.

- at beskrive en del af en helhed med brøk
- at undersøge, hvordan forskellige brøker kan udtrykke samme størrelse
- at undersøge, hvordan den størrelse, brøken beskriver, afhænger af helheden
- at beskrive, hvordan helheden kan se ud, når kun en brøkdel er kendt
- at undersøge sammenhængen mellem brøk og division
- at omskrive brøker til decimaltal og senere til procent.

Brøkbegrebet indgår på en sådan måde i undervisningen, at det først og fremmest udvider elevernes talforståelse, samtidig med at de opnår en vis færdighed i regning med brøker. Ved beregningsopgaver kan brøker ofte erstattes med decimaltal.
Procentbegrebet indføres som en særlig anvendelse af brøkbegrebet og med udgangspunkt i de mange eksempler, som kan hentes fra dagligdagen. Den tætte sammenhæng mellem brøker, decimaltal og procent skal fremstå tydeligt for eleverne. Arbejdet kan med fordel støttes af både konkrete materialer, illustrationer og fortællinger. Eleverne skal have mulighed for at inddrage egne repræsentationsformer, fx i form af tegninger, sammen med de repræsentationsformer, som læreren vælger.
Eleverne arbejder videremed udvikling af metoder til antalsbestemmelse inden for de naturlige tal. På 4.-6. klassetrin lægges hovedvægten på metoder til multiplikation og division, men alle fire regningsarter anvendes til at løse virkelighedsnære problemstillinger. I dette arbejde skal bl.a. lommeregner og it inddrages.
Udgangspunktet for udvikling af beregningsmetoder er fortsat elevernes uformelle strategier. Med henblik på øget talforståelse kan standardiserede algoritmer præsenteres og sammenlignes med de enkelte elevers beregningsmetoder.
Det undersøgende arbejde med talmønstre og strukturer i talrækker kan sammen med enkel ligningsløsning betragtes som et indledende arbejde med algebra. Sidst i forløbet kan dette arbejde også omfatte den første brug af formler og beskrivelse af sammenhænge.
Ligningsløsning foregår på grundlag af elevernes intuitive tænkning.
Arbejdet med geometri
Arbejdet med geometri tager udgangspunkt i dagligdags ting og fænomener og i den viden og kunnen, de enkelte elever tidligere har opbygget.
Ved at give eleverne mulighed for at tegne, beskrive og undersøge forskellige figurer og mønstre, skabes baggrund for dialog om geometriske metoder og begreber. Tegning og undersøgelse skal bl.a. foregå ved hjælp af it.
I elevernes arbejde med tegning, beskrivelse og undersøgelse
indgår

- vinkelbegrebet
- vinkelsummer i trekanter og andre polygoner
- linjers indbyrdes beliggenhed, herunder parallelitet
- sammenhængen mellem cirklers omkreds og diameter
- symmetri.

Eleverne arbejder med bygning af tredimensionelle figurer og enkle tegninger af disse. Sammenhængen mellem tegning og de rumlige figurer undersøges.

Tegning opfattet som model af virkeligheden kan også danne udgangspunkt for indledende overvejelser om brugen af matematiske modeller.

Undersøgelse af metoder til beregning af omkreds, areal og rumfang står centralt på mellemtrinnet. Eleverne skal arbejde undersøgende med egne uformelle strategier og med lærerens støtte formulere metoder til beregninger. Her vil der typisk være forskellige repræsentationer i spil, og problemløsning vil være en central del af arbejdet. Det er vigtigt, at læreren støtter elevernes arbejde med forståelsen af de geometriske begreber og med at generalisere metoderne.

Eleverne arbejder med aktiviteter, der inddrager målestoksforhold og ligedannethed.

Undersøgelser og eksperimenter inden for geometri er på længere sigt bl.a. rettet mod elevernes arbejde med systematik, generalisering og argumentation. Det er i et sådant undersøgende arbejde, at eleverne finder ud af, hvilke spørgsmål der er karakteristiske for matematik (tankegangskompetence). Læreren må støtte og udfordre elevernes begyndende argumentation (ræsonnementskompetencen) i forbindelse med de undersøgende aktiviteter.

Geometri forbindes med tal og algebra ved anvendelsen af koordinatsystemet, der i dette forløb introduceres og anvendes, bl.a. i forbindelse med beskrivelse af geometriske objekter og deres placering.

Arbejdet med geometri og tal bør i det hele taget spille sammen i undervisningen, da geometri kan støtte talforståelsen. For eksempel kan rektangler illustrere multiplikation, og dette kan danne grundlaget for det videre arbejde med algebra i overbygningen.

Arbejdet med statistik og sandsynlighed

Eleverne arbejder fortsat med indsamling af data. En del af dataindsamlingen kan stamme fra elevernes egne statistiske undersøgelser, der fx kan være et led i en projektorienteret og tværfaglig undervisning.

En del af dataindsamlingen skal stamme fra elevernes itsimulering af eksperimenter, der vedrører tilfældighed og chance.

Eleverne arbejder med at ordne, beskrive og tolke de data, de har indsamlet, og med at formidle resultaterne af deres undersøgelser.

Desuden arbejder de med at beskrive og tolke data og informationer, som fremgår af tabeller og diagrammer, andre har lavet – fx som de indgår i mediers præsentation af enkle undersøgelser.

I forbindelse med ordningen af data anvendes bl.a. it til sortering og fremstilling af tabeller og diagrammer.

I forbindelse med beskrivelsen af data indgår dialog, som kan foregå i hverdagssprog. Det centrale er, at eleverne bliver fortrolige med at uddrage oplysninger fra datamaterialer.

I forbindelse med tolkningen af data indgår, når det er hensigtsmæssigt, overvejelser vedrørende tilfældighed og chance. Disse overvejelser bygger fortsat på elevernes intuitive chancebegreb. Arbejdet med chancesituationer kan derfor ofte indledes med elevernes gæt på de forventede resultater. Efter dataindsamling tages gættene op til vurdering i en dialog om mulige forklaringer på de observationer, eleverne har foretaget.

På 4.-6. klassetrin begynder eleverne at knytte tal mellem 0 og 1 til chancer for hændelser. Deres vurderinger baserer sig først og fremmest på deres dataindsamling. Hvis de fx har opnået en 5´er i 17 terningkast ud af 100 forsøg, kan de antage, at denne hændelses sandsynlighed er omkring .
I forbindelse med terningekast kan elever i 4.-6. klasse argumentere for, at sandsynligheden for at slå en 5'er med en terning er , fordi terningen er symmetrisk og dermed giver samme chance for at slå de 6 tal.
Elevernes udsagn om sandsynlighed og argumenter for tilknytning af bestemte tal til hændelser kan danne udgangspunkt for eksperimenter og for faglig dialog i klassen.

Matematik i anvendelse

Undervisningen skal veksle mellem at tage udgangspunkt i

- matematikfaglige problemstillinger, hvor matematikkens anvendelser inddrages
- anvendelsessammenhænge, hvor matematikken indgår.

Matematik i anvendelse betragtes således dels som et område, hvor de matematiske emner kommer i spil, dels som et område, hvor matematikkens anvendelse danner grundlag for indsigt og erkendelse.
Der fokuseres på anvendelser af matematik, som eleverne kan møde i dagligdagen, fx via medier, og på anvendelser af matematik, som giver eleverne nye former for indsigt i andre fagområder, fx i naturen, det nære samfundsliv og i tværfaglige sammenhænge.
De matematikfaglige problemstillinger, hvor matematikkens anvendelser inddrages, skal omfatte

- beregning
- procent
- simpel ligningsløsning.

De anvendelsessammenhænge, hvor matematikken indgår, skal omfatte

- undersøgelser
- planlægning
- matematikken i aviser eller andre medier.

Gennem arbejdet får eleverne mulighed for at udvikle strategier til løsning af problemstillinger. Fx kan eleverne udvikle strategier for overslagsregning og procentregning. Elevernes forskellige strategier kan efterfølgende være genstand for dialog.

Matematiske arbejdsmåder

Eleverne skal have mulighed for at deltage i udviklingen af metoder. De skal ligeledes have mulighed for at undersøge, systematisere og begrunde matematisk samt arbejde med henblik på indledende generaliseringer.
Dette arbejde kan både være knyttet til fagets anvendelsesside og til problemstillinger, der formuleres for at belyse faglige begreber. I fællesskab præsenterer, diskuterer og evt. noterer eleverne den viden, de har fået igennem arbejdet.
Arbejdet kan bl.a. foregå ved at anvende dynamiske geometriprogrammer på computer og ved at anvende konkrete materialer som klodser, sømbræt og rumlige figurer.
Arbejdsformerne skal omfatte gruppearbejde, hvor en af hensigterne er, at eleverne samarbejder med andre om at løse problemer, hvor matematik benyttes.
Arbejdet med de matematiske arbejdsmåder baserer sig især på arbejdsformer, som bygger på dialog, men også på elevernes personlige refleksion.

Faglig læsning og matematikfaglige udtryk indgår igennem forløbet i stadigt større omfang i undervisningen.

3. forløb 7.-9. klassetrin

På disse klassetrin bygger undervisningen i stadigt stigende grad på den viden og kunnen, som eleverne har opnået i skolesammenhæng, men elevernes matematikrelevante erfaringer fra hverdagen skal stadig have mulighed for at spille en rolle i undervisningen.
Eleverne arbejder både mundtligt og skriftligt, på egen hånd og i samarbejde med andre på at udbygge kompetencer, viden og kunnen. Det er lærerens opgave at planlægge og gennemføre en undervisning, der sigter på, at de enkelte elever fortsat udvikler deres intuitive matematikforståelse til matematisk begrebsdannelse. I dette forløb bliver elevernes selvstændige tilegnelse af nye faglige områder og en alsidig anvendelse af allerede kendte faglige områder gradvist mere central i undervisningen.
I planlægningen må læreren have indhold, kompetencer og arbejdsmåder i spil på samme tid. Der sigtes på den måde mod udvalgte målsætninger fra flere CKF-områder i samme undervisningsforløb. Det er derfor vigtigt, at målsætningerne kan "spille sammen". For eksempel kan et undervisningsforløb i 7.-9. klasse, der indholdsmæssigt sigter på elevernes udvikling af metoder til ligningsløsning, på samme tid sigte mod elevernes udvikling af problem- og symbolbehandlingskompetence og på elevernes evner til at samarbejde med andre om at løse problemer ved hjælp af matematik.

Matematiske kompetencer

Den kompetencebaserede beskrivelse af matematisk faglighed er et alsidigt redskab i planlægningen og gennemførelsen af undervisningen på alle klassetrin.
I planlægningen fungerer kompetencebeskrivelsen dels til at fastsætte de dele af undervisningens mål, der vedrører de matematiske kompetencer, dels til valg af *indhold*.
I gennemførelsen fungerer kompetencebeskrivelsen dels til at vælge forskellige *tilgange* til det samme indhold, dels til at *perspektivere* indholdet.
Kompetencebeskrivelsernes betydning for lærerens planlægning af *mål* og *indhold* og for lærerens *tilgange* og *perspektiver* på indholdet i undervisningssituationen uddybes i det følgende.
Undervisningens mål og indhold skal give eleverne mulighed for at bygge videre på de matematiske kompetencer, de har erhvervet i og uden for skolesammenhæng. Det må således overvejes i planlægningen, hvordan mål og indhold tager hensyn til forskellige elevers forudsætninger og potentialer. Oftest vil det være hensigtsmæssigt at vælge "brede" mål og et "bredt" indhold for klassen som helhed, mens der til de enkelte elever kan knyttes mere specifikke forventninger.
Det vil ofte være hensigtsmæssigt at vælge aktiviteter, hvor flere kompetencer kommer i spil på samme tid.
Sådanne aktiviteter kan bl.a. have form af undersøgelser, rent faglige og anvendelsesorienterede opgaver og projekter. Aktiviteterne skal rumme problemstillinger,der giver eleverne mulighed for at inddrage både uformelle repræsentationsformer og formelle repræsentationsformer samt allerede etableret viden og kunnen.
Aktiviteterne må give anledning til at anvende matematik og til at indgå i dialog om og med matematik. På den måde sigtes mod elevernes udvikling af *problembehandlings-* , *repræsentations-* og *kommunikationskompetence*.
Det er især igennem dialogen i forbindelse med ovennævnte type problemstillinger, at læreren kan udfordre elever, der arbejder med det samme faglige indhold, på forskellige måder. I den forbindelse kan kompetencebeskrivelserne med fordel betragtes som forskellige

tilgange til og perspektiver på det samme indhold. Fx kan en elev, der arbejder med at undersøge sammenhængen mellem vinkler og sidelængder, udfordres på både problembehandlings-, repræsentations- og kommunikationskompetencen ved, at læreren stiller åbne spørgsmål, der sigter på de forskellige kompetencer.
I spørgsmål til den enkelte elev kan læreren tage udgangspunkt i netop denne elevs forudsætninger og potentialer.
Det er igennem arbejdet med ovennævnte type aktiviteter, at eleven, med lærerens støtte, får mulighed for efterhånden at videreudvikle *tankegangs*- og *ræsonnementskompetence*, herunder skelne mellem definitioner og sætninger og forstå, gennemføre og vurdere matematiske ræsonnementer.
Det er ved fortsat at arbejde med forbindelserne mellem uformelle repræsentationsformer og matematiske symboler, at eleven efterhånden videreudvikler *symbolbehandlingskompetence*. I løbet af 7., 8. og 9. klassetrin stilles efterhånden større krav til de enkelte elevers korrekte brug og forståelse af matematisk symbolsprog.
Problemløsning, dialog og alsidig anvendelse af repræsentationer kan fortsat betragtes som udgangspunktet for undervisningen. I løbet af 7., 8. og 9. klasse stilles der større krav til elevernes anvendelse og forståelse af matematisk modellering og kritiske vurdering af løsninger.
Eleverne udbygger deres fortrolighed med anvendelse af lommeregner og it, så disse hjælpemidler kan understøtte deres arbejde med matematik på en hensigtsmæssig måde.

Matematiske emner

Arbejdet med tal og algebra

Eleverne introduceres til de reelle tal igennem arbejdet med problemstillinger, hvor de rationale tal ikke slår til ved løsningen. Denne udvidelse af talområdet giver anledning til nye undersøgelser af tallenes egenskaber og samspillet mellem regningsarterne, herunder regningsarternes hierarki.
Undersøgelserne omfatter på 7.-9. klassetrin bl.a.

- tallenes indbyrdes størrelse
- geometrisk repræsentation af regneregler
- potenser og rødder

omskrivning og reducering af algebraiske udtryk.
I elevernes udforskning af de reelle tals egenskaber skelnes mellem regler, der følger af definitioner og vedtagelser, som regnehierarki og notationsformer.
Tallenes historiske udvikling inddrages.
Eleverne udvikler fortsat beregningsmetoder med henblik på øget talforståelse. I dette forløb lægges vægten på udvikling af metoder til brøkregning, procentregning og ligningsløsning. Arbejdet omfatter både hovedregning, regning med skriftlige notater og brug af lommeregner.
Brøker anvendes i de naturlige sammenhænge, de optræder i. Omfanget af regning med brøker afpasses under hensyn til brugen af dem i forbindelse med ligningsløsning og andre algebraiske emner.
Arbejdet med algebra har forskellige retninger

- i forbindelse med undersøgelser af forandringer og strukturer i talmønstre sigtes mod algebra anvendt til elevernes beskrivelse af generaliseringer
- i forbindelse med løsning af ligninger sigtes mod algebra anvendt som redskab til problemløsning
- i forbindelse med arbejdet med funktioner sigtes mod algebra anvendt som beskrivelse af sammenhænge.

Algebra indgår desuden i forbindelse med anvendelse af
formler.
Koordinatsystemet skal for eleverne fremstå som et redskab til at forbinde algebra og geometri. Funktioner repræsenteres både algebraisk som forskrifter og geometrisk som grafer i koordinatsystemet. I arbejdet med funktioner indgår desuden repræsentationsformer som tabeller og hverdagssproglige beskrivelser.
Beskrivelse af både lineære og ikke-lineære sammenhænge indgår i forbindelse med funktionsbegrebet. Desuden indgår begreberne ligefrem og omvendt proportionalitet. Arbejdet med funktionsbegrebet skal foregå i nært samspil med praktiske problemstillinger fra dagligliv, samfundsliv og naturforhold. It kan med fordel anvendes i udforskningen af sammenhængen mellem funktionsforskrifter og grafer.
Arbejdet med geometri
Arbejdet med geometri tager udgangspunkt i virkelighedens objekter og fænomener, i geometriske former og deres egenskaber samt i den viden og kunnen, eleverne tidligere har opbygget.
Ved at give eleverne mulighed for at fremstille skitser og tegninger under givne forudsætninger, og beskrive, undersøge og vurdere sammenhænge mellem tegning (model) og tegnet objekt, skabes baggrund for dialog om og med geometriske metoder og begreber, herunder størrelsesforhold og linjers indbyrdes beliggenhed.
It anvendes til tegning af og eksperimenter med geometriske figurer.
Arbejdet med at undersøge metoder til beregning af omkreds, areal og rumfang blev påbegyndt på mellemtrinnet og fortsættes i dette forløb. Det er stadig vigtigt, at eleverne arbejder undersøgende med egne uformelle strategier og med lærerens støtte formulerer metoder til beregningerne. Her vil der være mange repræsentationer i spil, og problemløsning vil være en central del af arbejdet. Eleverne kan undersøge metoder til arealberegning af parallelogrammer, trapezer og cirkler.
Arbejdet med undersøgelser og eksperimenter vægtes generelt højt i geometrien, og der sigtes igennem forløbet i højere og højere grad på elevernes evne til at systematisere, generalisere og argumentere.
Arbejdet med målestoksforhold, ligedannethed og kongruens danner baggrund for trigonometrien, der bygger på elevernes undersøgelser af sammenhængen mellem vinkler og sidelængder i retvinklede trekanter. It og lommeregner indgår i dette arbejde, hvorimod der ikke sigtes på anvendelse af tabeller.
Det er vigtigt, at arbejdet med trigonometri knyttes tæt til konkrete aktiviteter, så det bliver tydeligt, at det er en bekvem beregningsmåde, der knytter vinkler og sider i en retvinklet trekant sammen.
Hvor man på mellemtrinnet fx kan arbejde med at finde højden af en flagstang ved at måle afstanden hen til den og vinklen op til toppen og derefter tegne i et passende målestoksforhold, så kan man nu med samme konkrete udgangspunkt beregne højden vha. af trigonometri.
I arbejdet med måling og beregning sigtes både på løsning af praktiske og teoretiske problemstillinger og på elevernes forståelse af de formler, der indgår, herunder Pythagoras' sætning. Bl.a. dette sigte giver mulighed for at arbejde med enkle geometriske argumenter og beviser.

Geometri inddrages som repræsentation i forbindelse med arbejdet med algebraiske sammenhænge. Dette arbejder sigter bl.a.mod omskrivning og reduktion af algebraiske udtryk og omfatter

- en geometrisk fremstilling af a(b+c) som et rektangel med siderne a og (b+c)
- en geometrisk fremstilling af (a+b)2 som et kvadrat med siden (a+b).

Geometri forbindes desuden med tal og algebra ved anvendelse af koordinatsystemet, der i dette forløb blandt andet bruges til at undersøge sammenhænge mellem funktionsforskrifter og de tilhørende grafer.

Arbejdet med statistik og sandsynlighed

Eleverne undersøger og fortolker statistiske beskrivelser, bl.a. som de benyttes i medier og i andre fag. Der fokuseres bl.a. på sammenhængen mellem den måde, resultaterne fremstilles på, og den måde de opfattes på. Desuden tilrettelægger og gennemfører eleverne selv enkle statistiske undersøgelser. Dette arbejde kan være en del af en projektorienteret og tværfaglig undervisning.

Sandsynlighedsbegrebet indgår bl.a. i forbindelse med behandling af datamaterialer. Vægten lægges således på det statistiske sandsynlighedsbegreb.

Ved at anvende simuleringsprogrammer i forbindelse med chancesituationer vil eleverne få mulighed for at arbejde med opgaver, hvor de kan uddrage information fra programmets statistikker. Med sådanne programmer vil eleverne også kunne få indsigt i de store tals lov ved at erfare stabiliteten i resultater fra lange eksperimentserier.

I undervisningen indgår behandlingen af fænomener, der vedrører tilfældighed, chance eller risiko og usikkerhed. Eleverne skal erfare, at udsagn om tilfældighed og chance kan basere sig på

- indsamlede data
- et antal udfald, der opfattes som ligevægtede
- personlige vurderinger.

Det er ikke altid muligt – og det opleves heller ikke altid som nødvendigt – at bestemme sandsynligheder på baggrund af indsamlede data. I sådanne situationer kan eleverne basere deres vurderinger på optælling af mulige udfald, der betragtes som ligevægtede. På den måde indgår også elevernes kombinatoriske overvejelser. Der sigtes ikke direkte på anvendelsen af kombinatoriske formler.

I forbindelse med beregning af sandsynlighed er enkle modeller som diagrammer, krukkemodeller og chancetræer gode hjælpemidler. Arbejdet med sandsynlighed forudsætter ikke en formel faglig opbygning med egen symbolik. Der tilsigtes et præcist,men ikke formelt sprogbrug.

Matematik i anvendelse

Undervisningen skal veksle mellem at tage udgangspunkt i

- matematikfaglige problemstillinger, hvor matematikkens anvendelser inddrages
- anvendelsessammenhænge, hvor matematikken indgår.

Matematik i anvendelse betragtes således dels som et område, hvor de matematiske emner kommer i spil, dels som et område, hvor matematikkens anvendelse danner grundlag for indsigt og erkendelse.

I forløbet fokuseres på matematikkens anvendelse inden for dagligdagen og problemstillinger knyttet til samfundsmæssig udvikling, som kan give eleverne nye former for indsigt i andre fagområder, fx i biologi, i kunst og i andre tværfaglige sammenhænge.

Undervisningen skal i begyndelsen af forløbet forankres i overskuelige forhold fra hverdagen og senere tage udgangspunkt i problemstillinger, der i højere grad er knyttet til den samfundsmæssige udvikling. I takt med, at eleverne gradvis møder mere komplicerede problemstillinger, øges kravene til en mere bevidst brug af de matematiske kompetencer i arbejdet med problemstillingerne.
Undervisningen skal give eleverne mulighed for at bruge matematikken som et redskab til at behandle problemstillinger knyttet til dagligdagen og den samfundsmæssige udvikling, herunder økonomi, teknologi og miljø. Eleverne skal arbejde med matematiske modeller, fx formler og funktioner, samt anvendelse af enkle matematiske modeller i forbindelse med brug af it til undersøgelser og beskrivelser af samfundsmæssige forhold.
Eleverne skal arbejde med

- dagligdagens indkøb, transport og boligforhold
- lønopgørelser og skatteberegninger
- rentebegrebet, fx i tilknytning til opsparing, låntagning og kreditkøb
- miljø, teknologi og levevilkår, fx energiforbrug, affald og ressourcer
- simuleringer og statistiske beskrivelser.

Matematiske arbejdsmåder

Eleverne skal have mulighed for at deltage i udviklingen af metoder, undersøge, systematisere og ræsonnere matematisk samt veksle mellem praktiske og teoretiske overvejelser ved løsningen af matematiske problemstillinger.
Ræsonnementer og abstraktioner præger i stigende grad dette arbejde, og mere præcise faglige og sproglige beskrivelser kan benyttes til at redegøre for tankegange og som led i kommunikationen.
I arbejdet med geometri vil der være mange muligheder for at formulere hypoteser og gennemføre ræsonnementer.
Der indgår eksempler på, hvordan variable og symboler kan benyttes til at bevise regler og sammenhænge i matematikken.
Arbejdsformerne skal omfatte gruppearbejde og projektarbejde, hvor en af hensigterne er, at eleverne samarbejder med andre om at løse problemer ved hjælp af matematik. Sådanne arbejdsformer giver ofte anledning til, at eleverne formulerer resultater af den faglige indsigt, der er opnået ved mundtlige og/eller skriftlige præsentationer.
Arbejdet med de matematiske arbejdsmåder baserer sig især på arbejdsformer, som bygger på dialog, men også på elevernes personlige refleksion.
Faglig læsning og anvendelsen af informationer, der indeholder faglige udtryk, indgår i arbejdet igennem hele forløbet.

4. forløb 10. klasse

På dette klassetrin bygger undervisningen på elevernes større modenhed, der bevirker, at de er mere bevidste om deres fremtidige behov for at kunne forstå og benytte matematik. Den viden og kunnen, som eleverne har opnået i skolesammenhæng, og deres matematikrelevante erfaringer fra hverdagen, bl.a. fra brobygningsforløb, er dele af grundlaget for undervisningen.
Eleverne arbejder både mundtligt og skriftligt, på egen hånd og i samarbejde med andre på at udbygge kompetencer, viden og kunnen. Det er lærerens opgave at planlægge og gennemføre en undervisning, der sigter på dels stadig at give eleverne mulighed for at bruge deres intuitive matematikforståelse, dels give dem mulighed for at give valgte emner en bredere og mere dybtgående behandling.

I planlægningen må læreren have indhold, kompetencer og arbejdsmåder i spil på samme tid. Der sigtes på den måde mod udvalgte målsætninger fra flere CKF-områder i samme undervisningsforløb. Det er derfor vigtigt, at målsætningerne kan "spille sammen". For eksempel kan et undervisningsforløb i 10. klasse, der indholdsmæssigt sigter på, at eleverne forholder sig til beskrivelser og argumentationer af faglig art, som de fremtræder i medierne, på samme tid sigter på elevernes udvikling af kommunikationskompetencen og på elevernes evner til at samarbejde med andre om at løse problemer ved hjælp af matematik.

Matematiske kompetencer

Den kompetencebaserede beskrivelse af matematisk faglighed er et alsidigt redskab i planlægningen og gennemførelsen af undervisningen på alle klassetrin.

I planlægningen fungerer kompetencebeskrivelsen dels til at fastsætte de dele af undervisningens mål, der vedrører de matematiske kompetencer, dels til valg af *indhold*.

I gennemførelsen fungerer kompetencebeskrivelsen dels til at vælge forskellige *tilgange* til det samme indhold, dels til at *perspektivere* indholdet.

Kompetencebeskrivelsernes betydning for lærerens planlægning af *mål* og *indhold* og for lærerens *tilgange* og *perspektiver* på indholdet i undervisningssituationen uddybes i det følgende.

Undervisningens mål og indhold skal give eleverne mulighed for at bygge videre på de matematiske kompetencer, de har erhvervet i og uden for skolesammenhæng. Det må således overvejes i planlægningen, hvordan mål og indhold tager hensyn til forskellige elevers forudsætninger og potentialer. Oftest vil det være hensigtsmæssigt at vælge "brede" mål og et "bredt" indhold for klassen som helhed, mens der til de enkelte elever kan knyttes mere specifikke forventninger.

Det vil ofte være hensigtsmæssigt at vælge aktiviteter, hvor flere kompetencer kommer i spil på samme tid. Sådanne aktiviteter kan bl.a. have form af undersøgelser, rent faglige og anvendelsesorienterede opgaver og projekter. Aktiviteterne skal rumme praktiske problemstillinger, der giver eleverne mulighed for inddrage både uformelle og formelle repræsentationsformer samt allerede etableret viden og kunnen.

Aktiviteterne må give anledning til at anvende matematik og til at indgå i dialog om og med matematik. På den måde sigtes mod elevernes udvikling af *problembehandlings-* , *repræsentations-* og *kommunikationskompetence*.

Det er især igennem dialogen i forbindelse med ovennævnte type problemstillinger, at læreren kan udfordre elever, der arbejder med det samme faglige indhold, på forskellige måder. I den forbindelse kan kompetencebeskrivelserne med fordel betragtes som forskellige tilgange til og perspektiver på det samme indhold. Fx kan en elev, der arbejder med at undersøge funktioner i forskellige epræsentationer, udfordres på både problembehandlings-, repræsentations- og kommunikationskompetencen ved, at læreren stiller åbne spørgsmål, der sigter på de forskellige kompetencer.

I spørgsmål til den enkelte elev kan læreren tage udgangspunkt i netop denne elevs forudsætninger og potentialer.

Det er igennem arbejdet med ovennævnte type aktiviteter, at eleven, med lærerens støtte, får mulighed for efterhånden at videreudvikle *tankegangs-* og *ræsonnementskompetence*, herunder skelne mellem definitioner og sætninger og forstå, gennemføre og vurdere matematiske ræsonnementer.

Det er ved fortsat at arbejde med forbindelserne mellem uformelle repræsentationsformer og matematiske symboler, at eleven efterhånden videreudvikler *symbolbehandlingskompetence*. I løbet af 10. klassetrin stilles efterhånden større krav til de enkelte elevers korrekte brug og forståelse af matematisk symbolsprog.

Problemløsning, dialog og alsidig anvendelse af repræsentationer kan fortsat betragtes som udgangspunktet for undervisningen. I løbet af 10. klasse stilles der større krav til elevernes anvendelse og forståelse af matematisk modellering og kritiske vurdering af løsninger. Eleverne udbygger deres fortrolighed med anvendelse af lommeregner og it, så disse *hjælpemidler* kan understøtte deres arbejde med matematik på en hensigtsmæssig måde.

Matematiske emner

Arbejdet med tal og algebra

Eleverne fortsætter med at bruge de reelle tal igennem arbejdet med problemstillinger, hvor de rationale tal ikke slår til ved løsningen.
Udvidelsen af talområdet til de reelle tal giver fortsat anledning til undersøgelser af tallenes egenskaber og samspillet mellem regningsarterne, herunder regneartenes hierarki.
I elevernes udforskning af de reelle tals egenskaber skelnes mellem regler, der følger af definitioner, og vedtagelser, som regnehierarki og notationsformer.
Tallenes historiske udvikling inddrages.
Eleverne udvikler fortsat beregningsmetoder med henblik på øget talforståelse. I dette forløb lægges vægten på metoder til procentregning og ligningsløsning. Arbejdet omfatter både hovedregning, regning med skriftlige notater og brugen af lommeregner.
Brøker anvendes i de naturlige sammenhænge, de optræder i. Omfanget af regning med brøker afpasses under hensyn til brugen af dem i forbindelse med ligningsløsning og andre algebraiske emner.
Arbejdet med algebra har forskellige retninger:

- I forbindelse med undersøgelser af forandringer og strukturer i talmønstre sigtes mod algebra anvendt til elevernes beskrivelse af generaliseringer.
- I forbindelse med løsning af ligninger sigtes mod algebra anvendt som redskab til problemløsning.
- I forbindelse med arbejdet med funktioner sigtes mod algebra anvendt som beskrivelse af sammenhænge.

Eleverne skal arbejde med såvel kendte som ikke-kendte formler og kunne omforme dem hensigtsmæssigt til løsning af praktiske problemer.
Eleverne arbejder med forskellige metoder til ligningsløsning med henblik på at kunne vælge en hensigtsmæssig fremgangsmåde i forskellige situationer, der rummer arbejde med ligninger.
Koordinatsystemet skal for eleverne fremstå som et redskab til at forbinde algebra og geometri. Funktioner repræsenteres fx både algebraisk som forskrifter og geometrisk som grafer i koordinatsystemet. I arbejdet med funktioner indgår desuden repræsentationsformer som tabeller og hverdagssproglige beskrivelser.
Beskrivelse af både lineære og ikke-lineære sammenhænge indgår i forbindelse med funktionsbegrebet. På 10. klassetrin lægges der særlig vægt på at arbejde med procentuel vækst i forskellige sammenhænge. Desuden indgår begreberne ligefrem og omvendt proportionalitet.
Arbejdet med funktionsbegrebet skal foregå i nært samspil med praktiske problemstillinger fra dagligliv, samfundsliv og naturforhold.
It kan med fordel anvendes i udforskningen af sammenhængen mellem funktionsforskrifter og grafer.

Arbejdet med geometri

Arbejdet med geometri tager udgangspunkt i virkelighedens objekter og fænomener, i geometriske former og deres egenskaber og i den viden og kunnen, eleverne tidligere har opbygget.

Ved at give eleverne mulighed for at fremstille skitser og tegninger under givne forudsætninger, og beskrive, undersøge og vurdere sammenhænge mellem tegning (model) og tegnet objekt, skabes baggrund for dialog om og med geometriske metoder og begreber, herunder størrelsesforhold og linjers indbyrdes beliggenhed.
It anvendes til tegning af og eksperimenter med geometriske figurer.
Det arbejde, som blev påbegyndt på mellemtrinnet, med at undersøge metoder til beregning af omkreds, areal og rumfang fortsættes i dette forløb. Det er stadig vigtigt, at eleverne arbejder undersøgende med egne uformelle strategier og med lærerens støtte formulerer metoder til beregningerne. Her vil der være mange repræsentationer i spil, og problemløsning vil være en central del af arbejdet. Eleverne kan fx undersøge metoder til arealberegning i forbindelse med parallelogrammer, trapezer og cirkler.
Arbejdet med undersøgelser og eksperimenter vægtes generelt højt i geometrien, og der sigtes igennem forløbet i højere og højere grad på elevernes evne til at systematisere, generalisere og argumentere. Arbejdet med målestoksforhold, ligedannethed og kongruens danner baggrund for trigonometrien, der bygger på elevernes undersøgelser af sammenhængen mellem vinkler og sidelængder i retvinklede trekanter. It indgår i dette arbejde, hvorimod der ikke sigtes på anvendelse af tabeller.
Det er vigtigt, at arbejdet med trigonometri knyttes tæt til konkrete aktiviteter, så det bliver tydeligt, at det er en bekvem beregningsmåde, der knytter vinkler og sider i en retvinklet trekant sammen.
Hvor man på mellemtrinnet fx kan arbejde med at finde højden af en flagstang ved at måle afstanden hen til den og vinklen op til toppen og derefter tegne i et passende målestoksforhold, så kan man nu med samme konkrete udgangspunkt beregne højden vha. af trigonometri.
I arbejdet med måling og beregning sigtes både på løsning af praktiske og teoretiske problemstillinger og på elevernes forståelse af de formler, der indgår, herunder Pythagoras' sætning. Bl.a. dette sigte giver mulighed for at arbejde med enkle geometriske argumenter og beviser.
Geometri inddrages som repræsentation i forbindelse med arbejdet med algebraiske sammenhænge. Dette arbejder sigter bl.a. mod omskrivning og reduktion af algebraiske udtryk og omfatter

- en geometrisk fremstilling af a(b+c) som et rektangel med siderne a og (b+c)
- en geometrisk fremstilling af (a+b)2 som et kvadrat med siden (a+b).

Geometri forbindelse desuden med tal og algebra ved anvendelse af koordinatsystemet, der i dette forløb blandt andet bruges til at undersøge sammenhænge mellem funktionsforskrifter og de tilhørende grafer.
Arbejdet med statistik og sandsynlighed
Eleverne undersøger og fortolker statistiske beskrivelser, bl.a. således som de benyttes i medier og i andre fag. Der fokuseres bl.a. på sammenhængen mellem den måde resultaterne fremstilles på, og den måde de opfattes på. Desuden tilrettelægger og gennemfører eleverne selv enkle statistiske undersøgelser. Dette arbejde kan være en del af en projektorienteret og tværfaglig undervisning.
Sandsynlighedsbegrebet indgår især i forbindelse med behandling af datamaterialer. Vægten lægges således på det statistiske sandsynlighedsbegreb.
Ved at anvende simuleringsprogrammer i forbindelse med chancesituationer vil eleverne få mulighed for at arbejde med opgaver, hvor de kan uddrage information fra programmets statistikker. Med sådanne programmer vil eleverne også kunne få indsigt i de store tals lov ved at erfare stabiliteten i resultater fra lange eksperimentserier.

I undervisningen indgår behandlingen af fænomener, der vedrører tilfældighed, chance eller risiko og usikkerhed, herunder stikprøveundersøgelser.
Eleverne skal erfare, at udsagn om tilfældighed og chance kan basere sig på

- indsamlede data
- et antal udfald, der opfattes som ligevægtede
- personlige vurderinger.

Det er ikke altid muligt – og det opleves heller ikke altid som nødvendigt – at bestemme sandsynligheder på baggrund af indsamlede data. I sådanne situationer kan eleverne basere deres vurderinger på optælling af mulige udfald, der betragtes som ligevægtede. På den måde indgår også elevernes kombinatoriske overvejelser. Der sigtes ikke direkte på anvendelsen af kombinatoriske formler.
I forbindelse med beregning af sandsynlighed er enkle modeller som diagrammer, krukkemodeller og chancetræer gode hjælpemidler. Arbejdet med sandsynlighed forudsætter ikke en formel faglig opbygning med egen symbolik. Der tilsigtes et præcist,men ikke formelt sprogbrug.

Matematik i anvendelse

Undervisningen skal veksle mellem at tage udgangspunkt i

- matematikfaglige problemstillinger, hvor matematikkens anvendelser inddrages
- anvendelsessammenhænge, hvor matematikken indgår.

Matematik i anvendelse betragtes således dels som et område, hvor de matematiske emner kommer i spil, dels som et område, hvor matematikkens anvendelse danner grundlag for indsigt og erkendelse.
I 10. klasse fokuseres stadig på matematikkens anvendelse inden for dagligdagen, men med større vægt på arbejdsliv og fritid og problemstillinger knyttet til samfundsmæssig udvikling, som kan give eleverne nye former for indsigt i andre fagområder, fx i naturfag, i samfundsfag og i andre tværfaglige sammenhænge.
Undervisningen skal fortsat forankres i overskuelige forhold fra hverdagen og den samfundsmæssige udvikling. I takt med, at eleverne gradvis møder mere komplicerede problemstillinger, øges kravene til en mere bevidst brug af de matematiske kompetencer i arbejdet med problemstillingerne. Undervisningen skal give eleverne mulighed for at bruge matematikken som et redskab til at behandle problemstillinger knyttet til dagligdagen og den samfundsmæssige udvikling, herunder økonomi, teknologi og miljø. Eleverne skal arbejde med matematiske modeller, fx formler og funktioner, samt anvendelse af enkle matematiske modeller i forbindelse med brug af computeren til undersøgelser og beskrivelser af samfundsmæssige forhold.
Elverne skal bl.a. arbejde med emner vedrørende

- miljø
- økonomi
- anvendelsen af matematik i forbindelse med kunst, design eller håndværk
- dagligdagens indkøb, transport og boligforhold
- lønopgørelser, budgetlægning og skatteberegninger
- rentebegrebet
- simuleringer og statistiske beskrivelser.

Matematiske arbejdsmåder
Eleverne skal have mulighed for at deltage i udviklingen af metoder, undersøge, systematisere, ræsonnere og generalisere matematisk samt veksle mellem praktiske og teoretiske overvejelser ved løsningen af matematiske problemstillinger.
Ræsonnementer og abstraktioner præger i stigende grad dette arbejde, og mere præcise faglige og sproglige beskrivelser kan benyttes til at redegøre for tankegange og som led i kommunikationen.
I arbejdet med geometri vil der være mange muligheder for at formulere hypoteser og gennemføre ræsonnementer.
Der indgår eksempler på, hvordan variable og symboler kan benyttes til at bevise regler og sammenhænge i matematikken.
Arbejdsformerne skal omfatte gruppearbejde og projektarbejde, hvor en af hensigterne er, at eleverne samarbejder med andre om at løse problemer ved hjælp af matematik. Sådanne arbejdsformer giver ofte anledning til, at eleverne formulerer resultater af den faglige indsigt, der er opnået ved mundtlige og/eller skriftlige præsentationer.
Arbejdet med de matematiske arbejdsmåder baserer sig især på arbejdsformer, som bygger på dialog, men også på elevernes personlige refleksion.
Faglig læsning og anvendelsen af informationer, der indeholder faglige udtryk, indgår i arbejdet igennem hele forløbet.

Undervisningsvejledning for faget matematik

Indledning

Det er opgaven i faghæftet at beskrive, hvad der er målet med undervisningen i matematik, hvad den bør omfatte, og hvad eleverne skal lære. Og i undervisningsvejledningen er det hensigten at uddybe og give eksempler, der gør det tydeligt, “hvad det hele går ud på”.
Da faget matematik i folkeskolen er så omfattende, er det nødvendigt i undervisningsvejledningen at vælge emner og perspektiver ud, som må vurderes som særligt vigtige eller særligt karakteristiske for faget, som det er beskrevet i læseplanen.
Undervisningen i matematik er et komplekst samspil mellem didaktiske overvejelser vedrørende det faglige indhold og praktisk-pædagogiske overvejelser knyttet mere direkte til selve planlægningen, gennemførelsen og evalueringen af undervisningen. Dette samspil er søgt tilgodeset ved at skrive undervisningsvejledningen i fire hovedafsnit, som for så vidt kan læses uafhængigt af hinanden, men som kun tilsammen giver et nogenlunde dækkende billede af intentionerne bag læseplanens beskrivelse af faget.
De fire hovedafsnit:
Faget matematik i folkeskolen beskriver sammenhængen mellem de matematiske emner, matematik i anvendelse, matematiske kompetencer og matematiske arbejdsmåder. Det er vigtigt, at disse fire centrale kundskabs- og færdighedsområder kommer til at spille sammen i den daglige undervisning. Det er også her, det beskrives, hvorfor netop disse fire områder er valgt.
Matematiklærer i folkeskolen anskuer undervisningen ud fra lærerens rolle og beskriver først og fremmest en række af de opgaver, læreren skal løse i forhold til faget og eleverne.
Faglig-didaktiske områder indeholder overvejelser over fagets hovedområder og præsenterer vigtige områder i læseplanen. Der er tale om en faglig og didaktisk tilgang til udvalgte emner, men de faglige overvejelser kan naturligvis ikke adskilles fra didaktiske overvejelser om læringssyn, undervisnings tilrettelæggelse mv.

Undervisningsforløb tager først og fremmest udgangspunkt i eksempler på undervisning på forskellige klassetrin, men behandler også faglige emner, som i nogen grad supplerer de foregående afsnit. Beskrivelserne er eksemplariske, således at den faglig-didaktiske tankegang kan overføres til andre klassetrin end de angivne.

De vigtigste ændringer

Der er foretaget en del ændringer i forhold til de tidligere Fælles Mål. I punktform kan de opremses på denne måde:

- Matematiske kompetencer og matematiske arbejdsmåder er selvstændige centrale kundskabs- og færdighedsområder.
- Matematiske emner indeholder områderne tal og algebra, geometri samt statistik og sandsynlighed.
- Elevens aktive deltagelse i udvikling af beregningsmetoder er blevet præciseret
- Faglig læsning er nu både slut- og trinmål.
- Perspektivtegning er blevet nedtonet.
- Enkel trigonometri er tilføjet.

De fleste mål vil imidlertid forekomme kendte, men derimod er strukturen og organiseringen af de fire centrale kundskabs- og færdighedsområder ændret meget, hvorfor denne undervisningsvejledning lægger særlig vægt på at beskrive, hvilken betydning ændringerne i strukturen vil have for planlægningen og gennemførelsen af undervisningen.

Faget matematik i folkeskolen

Faget matematik i folkeskolen

Det har været almindeligt først og fremmest at beskrive matematikundervisningen i folkeskolen ud fra de matematiske emner, der skulle undervises i. Og det er naturligvis også en væsentlig del af beskrivelsen.Men hvis der i en læseplan kun står en opremsning af fagområder, begreber og tekniske metoder, siges der ikke så meget andet, end at matematikundervisningen går ud på at lære noget udvalgt matematik.Man indfanger ikke essensen af matematikundervisning på den måde, ligesom en ren indholdsbeskrivelse ikke fortæller ret meget om det udbytte, elever forventes at få af undervisningen. Det er altså nødvendigt ikke kun at fokusere på, hvilke emner der undervises i, men også på, hvordan der arbejdes med emnerne, og hvilken dybere forståelse og indsigt der opnås.

I Fælles Mål er matematisk faglighed derfor beskrevet i fire centrale kundskabs- og færdighedsområder:

- Matematiske kompetencer
- Matematiske emner
- Matematik i anvendelse
- Matematiske arbejdsmåder.

De fire CKF'er supplerer hinanden indholdsmæssigt og griber ind i hinanden. Matematiske emner og matematik i anvendelse vedrører det, der traditionelt er forbundet med undervisningens indhold. De matematiske arbejdsmåder rummer mål, der knytter sig til de måder, eleverne skal arbejde med indholdet på, og de matematiske kompetencer rummer mål, der knytter sig til matematikkens natur, uafhængig af hvilke emner, der undervises i.

Indhold, arbejdsmåder og kompetencer vil alle tre på samme tid være elementer i en given undervisning.

Læreren kan altså både i sin planlægning og i selve undervisningen tænke ved hjælp af de tre områder (se figuren nedenfor).

I det følgende vil de tre områder blive behandlet nærmere med hovedvægt på de to nye CKF'er. De tre områder beskrives hver for sig, men deres tætte sammenhæng i undervisningen er i fokus.

Undervisningens indhold

De matematiske emner og matematik i anvendelse kan opfattes som undervisningens indhold. Det omfatter: *Tal og algebra*, *geometri*, *statistik og sandsynlighed* og *matematik i anvendelse*. Der er en tæt sammenhæng mellem emner og anvendelse. Den tætte sammenhæng giver eleverne mulighed for

1. at få tænkeredskaber til matematikken
2. at opleve, at matematikken ikke er et isoleret fag.

Om samspillet mellem de matematiske emner og matematikkens anvendelse står der i læseplanen på alle trin:
Undervisningen skal veksle mellem at tage udgangspunkt i

- *matematikfaglige problemstillinger, hvor matematikkens anvendelse inddrages*
- *anvendelsessammenhænge, hvor matematikken indgår.*

Det er altså tydeligt, at de matematiske emner og matematikkens anvendelse skal kædes tæt sammen i undervisningen. Ofte tages der udgangspunkt i et problem fra "den virkelige verden", der søges løst ved hjælp af matematikken.
I andre situationer er det omvendt. Da er det de matematiske emner, der er fokus på, og "den virkelige verden", der bruges som tænkeredskab for eleven. I denne situation er det altså ikke matematikken, der anvendes til at løse et problem uden for matematik, men "den virkelige verden", der bruges som en slags redskab til at tænke i og skabe matematik ved hjælp af.
Ofte spiller de to tilgange sammen, så det kan være svært at skelne mellem, hvornår man lærer matematik ved hjælp af "den virkelige verden", og hvornår man lærer om "den virkelige verden" ved hjælp af matematikken.

Et eksempel hvor matematik bruges til at løse et problem fra "den virkelige verden

8. klasse skal selv arrangere en lejrtur og herunder lægge et realistisk budget. Klassen indsamler alle relevante oplysninger om det økonomiske grundlag, finder ud af, hvad de kunne tænke sig at opleve og gøre, og hvad det koster. Et regneark konstrueres, der udarbejdes formler, der simuleres i den forstand, at eleverne afprøver, hvad der sker, hvis man ændrer på de forskellige poster i budgettet. Målet er at få budgettet til at passe, så flest mulige af elevønskerne bliver opfyldt. Efter lejrturen udarbejder klassen selv et regnskab, der er klar til revision.
Men uanset om hensigten er at udvikle matematisk forståelse eller at løse et problemuden for matematikken, så er det centrale, at det matematiske indhold i undervisningen for eleverne i høj grad er de faglige processer, hvor eleverne kan tænke ved hjælp af noget kendt. Det kendte kan være fra "verden udenom", eller det kan være fra en fortælling, en situation eller en aktivitet.

Et eksempel hvor noget kendt fra "virkelighedens verden" bruges som tænkeredskab

Arbejdet med dette eksempel tager udgangspunkt i en oplevelse af fugletræk, som er observeret under en udflugt i natur og teknik, hvor det er tydeligt, at fuglene flyver i en vinkelformation. Eller det tager udgangspunkt i billeder af fugle, der flyver i en vinkel. Eller i en

fortælling
om fugletræk, fx fra "Niels Holgersens vidunderlige rejse gennem Sverige".
Hensigten med det matematikfaglige indhold er at arbejde med lige og ulige tal, hovedregning, variable og figurfølger. Fuglenes træk er altså et redskab til at tænke igennem og udvikle matematik ud fra.
Fuglene tegnes formelt:

Spørgsmål, læreren lader eleverne arbejde ud fra, kan så fx være:

- Prøv at tegne nogle flere fugle-mønstre. Hvordan ser det næste ud?
- Hvor mange fugle-prikker er der i mønster 3? I mønster 5? I mønster 10?
- I mønster 100?
- Kan der være 48 prikker?
- Kan to grupper forenes til én?
- Jeg har adderet to hele tal og fået et fuglemønster-tal. Hvilken slags tal har jeg adderet?

Læreren vil forberede flere spørgsmål ud fra sit kendskab til eleverne og fra sin forestilling om, hvordan eleverne ville gribe opgaven an.
Lærerens forberedelse vil altså i høj grad bygge på, hvordan, han tror, eleverne vil tænke. Og i undervisningssituationen håber han yderligere at få mulighed for at udfordre eleverne ud fra, hvad de gør og tænker.
Der er altså en tæt sammenhæng mellem det matematikfaglige indhold om lige og ulige tal, hovedregning, variable og figurfølger, og selve arbejdsprocessen, hvor eleverne skal have mulighed for at undersøge ved at tegne, tænke og tale sammen. De faglige processer er knyttet tæt til det observerede fugletræk.

Arbejdsmåder

De måder, hvorpå eleverne arbejder med matematik, har stor betydning for kvaliteten af den faglighed, de tilegner sig. Arbejdsmåder har derfor altid fået megen opmærksomhed, både i faghæfterne og i lærerens daglige arbejde med at planlægge og tilrettelægge undervisning.
Vi kan blandt andet se det i de følgende citater.
I faghæftet fra 1976 står der under overskriften "Mål vedrørende elevernes arbejdsformer": *Det må i denne forbindelse anses for at være et mål, at den enkelte elev kommer til at indtage en eksperimenterende holdning ved indlevelse i matematiske områder, som er nye for ham*.
Og i faghæftet fra 1995 står der under "Centrale kundskabs- og færdighedsområder": *Eleverne skal opnå et handleberedskab over for problemer, der ikke er af rutinemæssig art, og de skal være fortrolige med eksperimenterende arbejdsformer.*
Det er altså ikke noget nyt, at arbejdsmåder spiller en central rolle i faghæftet. Det er en tradition i matematikundervisningen og i faghæfterne, der fortsættes i Fælles Mål, hvor arbejdsmåder er blevet et selvstændigt CKF med egne slutmål og trinmål.
Det er centralt for trinmålene på alle trin, at eleverne skal blive i stand til at *deltage i udviklingen af strategier og metoder i forbindelse med de matematiske emner*. Det er vigtigt, at eleverne både kan arbejde *individuelt og sammen med andre*, og det fremhæves, at de skal kunne *arbejde eksperimenterende og undersøgende*. I alle disse mål indgår dialogen som en central arbejdsmåde. Hvordan arbejdsmåderne realiseres i undervisningen, er selvfølgelig helt forskelligt i en 1. klasse og i en 9. klasse. Lad os se på et eksempel i en 2. klasse.

Et eksempel på planlægning med arbejdsmåder i fokus

En lærer på 2. klassetrin har valgt, at emnet for en periode er store tal og positionssystemet. Læreren arbejder ud fra følgende mål:

At eleverne bliver i stand til *at kende de naturlige tals opbygning og ordning, herunder titalssystemet*.
Det er altså meget klart fra start, hvad eleverne skal arbejde med. Men *hvordan* de skal arbejde, kræver flere overvejelser. Når læreren tænker i arbejdsmåder, er der typisk både praktisk-pædagogiske overvejelser og faglige og didaktiske overvejelser inde i billedet.
I læseplanen står der:
Dialogen er et vigtigt redskab i de matematiske arbejdsmåder. Igennem dialogen skal eleverne have mulighed for at ræsonnere.
Læreren tænker:
"Det er vigtigt at arbejde med positionssystemet. Det er jo det, hele talforståelsen bygger på. Eleverne skal snakke sammen om det, så de kan udfordre hinanden.
De får hvert et trecifret tal. De går rundt i klassen og viser en kammerat deres tal og fortæller, hvad der står, og hvor mange 1'ere, 10'ere og 100'er, der er". Lærerne vælger altså at inddrage dialogen.
Andre spørgsmål, læreren forbereder, kunne være:

- Kan du finde en makker, der har det samme antal enere? Tiere? Hundreder?
- Kan du finde en makker med tallet, der er 1 større? 10 større? 100 større?
- Kan du finde en makker, så forskellen mellem jeres tal er 2? 20? 200?
- Kan du finde en makker, så summen af jeres tal er 1000?
- Kan I stille jer i rækkefølge efter størrelse?

I læseplanen står der:
Undervisningens indhold skal vælges, så eleverne får mulighed for at deltage i udviklingen af metoder og arbejde eksperimenterende og undersøgende.
Og læreren tænker i andre aktiviteter:
"Man kunne jo lade dem tælle mange små ting, fx klips og bønner. Så skal de selv finde ud af, hvordan de vil tælle og holde styr på, hvor mange der er. Og så vil der jo nok være nogle af dem, der vælger 10'er bunker. Det vigtigste er, at de ved, hvad problemet er, og at de finder måder at løse det på. Jeg må prøve at udfordre deres strategier undervejs, fx ved at tælle med remser 2, 4, 6,… eller 5, 10, 15, 20,…, og jeg må prøve at være opmærksom på, hvilke strategier de i øvrigt har, og udnytte dem"
Aktiviteterne knyttes til mål for arbejdsmåder, men også *problembehandlingskompetence*n stikker hovedet frem. Det kommer næsten af sig selv, men det er bevidstheden om det, der fastholder det som et mål. Lærerne vil altså støtte eleverne i det problemløsende frem for at få dem hurtigt frem til et resultat.
Det er her centralt, at det emnefaglige indhold, kompetencerne og arbejdsmåderne spiller sammen og påvirker hinanden gensidigt. Det er altså ikke bare sådan, at læreren vælger et matematisk emne og derefter tænker, hvilke arbejdsmåder der kan komme i spil. Det er også sådan, at påvirkningen kan gå den anden vej: læreren styres af mål for arbejdsmåder, når han/hun vælger indholdet. Hvis læreren fx tager udgangspunkt i, at eleven skal *arbejde med problemløsning i en proces, der bygger på dialog*, må indholdet jo vælges, så der faktisk er en problemstilling at løse. Og denne problemstilling må være velegnet til dialog.
Og læreren tænker videre:
"Jeg synes jo, de skal bruge centicubes og 10'er stænger og 100'er plader. Og penge. Ja, i det hele taget alle de *repræsentationer*, vi kan finde på." Læreren beslutter, at eleverne i grupper skal
finde ud af, hvordan de talte bønnerne og klipsene og finde frem til, hvor mange der var

finde mindst to måder at repræsentere dem på
til slut fælles fortælle de andre, hvilke resultater de havde fået, hvordan de var kommet frem til resultatet, og hvordan de havde valgt at vise, hvor mange der var.
Hele denne planlægningsfase kan illustreres med modellen fra før, hvor de elementer, der blev vigtige i dette forløb, er skrevet ind.

Dialogen er vigtig mellem eleverne, når de indbyrdes finder ud af, hvordan de tæller alle disse bønner. Der skal laves strategier. Men dialogen er også vigtig mellem læreren og eleverne, for det er ofte i dialogen, læreren kan udfordre eleverne. Nogle af de spørgsmål, læreren kunne stille for at udfordre videre her, kunne fx være:

- Hvad er egentlig store tal?
- Kan tal blive større end noget med hundreder?
- Hvis jeg nu tager dobbelt så mange, som I har, hvor mange har jeg så?
- Og dobbelt så mange igen?
- Hvordan skal jeg kunne skrive de store tal?
- Så må jeg også have fat i tusinder! Hvordan gør jeg det?

Det er ofte dialogen i forbindelse med det undersøgende arbejde, der differentierer undervisningen. Det er her, talforståelsen ofte udvikler sig i spring. Det dobbelte af 304 kan let lade sig gøre. Men hvad nu med det dobbelte af 367? Mange niveauer kan være til stede side om side, blot i måden spørgsmål bliver stillet på. Det er spændende at udforske tallene, både for lærer og elever.
Arbejdsmåder spiller altså en væsentlig rolle for, hvordan den faglige samtale – og dermed den faglige læring bliver. Men selv om vi i dette eksempel har haft fokus på arbejdsmåderne, var det alligevel tydeligt, at kompetencerne var i spil. Hvordan de kan spille en rolle som det tredje element i undervisningen, beskrives i næste afsnit.

Matematiske kompetencer

At beskrive matematisk faglighed uden brug af den traditionelle pensumtænkning kom for alvor ind i den fagligdidaktiske tænkning i 2002, da der i Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie udkom en rapport, der forsøgte at beskrive matematisk faglighed ved hjælp af kompetencebegrebet. Rapporten hed "Kompetencer og matematiklæring. Idéer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark", i daglig tale kaldet "KOM-rapporten".
Her defineres matematisk kompetence som det at "have viden om, at forstå, udøve, anvende og kunne tage stilling til matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå". Og her beskrives de 8 kompetencer, der bruges i Fælles Mål.
Om de enkelte matematiske kompetencer siger "KOMrapporten":
"En matematisk kompetence er en indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematisk udfordring".
Der opereres med i alt otte kompetencer, der deles i to grupper således:

Ofte gives en visuel fremstilling af kompetencerne ved hjælp at det, der kaldes *kompetenceblomsten*:

Denne grafiske model skal bl.a. signalere, at de enkelte kompetencer ikke er skarpt adskilt, men “overlapper” og spiller sammen.

I trinmålene efter 3., 6., 9. og 10. klasse og i slutmålene er beskrevet, hvilke dele af de enkelte kompetencer der lægges vægt på i arbejdet på de forskellige trin. Og i læseplanen er beskrevet, hvordan de spiller sammen med det matematiske indhold og arbejdsmåder.

KOM-rapportens symbol- og formalismekompetence bliver i Fælles Mål 2009 kaldt symbolbehandlingskompetence.

De 8 kompetencer indgår allerede i dag som centrale elementer i undervisningen.

Kommunikation og problemløsning har stået centralt i faghæftet for matematik siden 1995, hvor de to kompetencer blev et selvstændigt CKF. Lærere har ydermere altid været optaget af at finde forskellige *repræsentationer* for matematiske begreber. De har arbejdet med konkrete ting, og de har fortalt historier, der skulle skabe forestillinger, eleven kunne tænke igennem, altså *repræsentationer*. Ting at tælle, enerbrikker, 10-stænger og 100-plader, centicubes og sømbræt er almindelige *hjælpemidler*. *Ræsonnement* og *symbolbehandling* er centrale dele af faget og har altid været det. Hvem kan forestille sig en matematikundervisning uden “hvis-så-sætninger”? Og hvem kan forestille sig en matematikundervisning uden a’er og b’er og x’er og y’er?

At arbejde med kompetencer er altså ikke nyt for læreren. Men der er et langt skridt fra at have enkelte kompetencer inde i billedet af og til, og så til at lade kompetencetænkningen være en del af undervisningen hver dag og at sætte mål for fagligheden ved hjælp af kompetencerne.

Det er idéen, at arbejdet med kompetencerne og med de faglige emner er vævet tæt sammen, så eleverne, mens de lærer om fx brøker, samtidig bliver dygtige til at *løse problemer, at ræsonnere og at repræsentere* brøker og regning med brøker på mange forskellige måder. Og at de bliver i stand til “*at forstå og anvende*” brøker og arbejde med brøker “*i en mangfoldighed af sammenhænge*”.

At kompetencerne nu er blevet en del af trinmålene i faghæftet, betyder altså, at der i arbejdet med de faglige emner og kompetencerne skal nås en større indsigt i matematisk tankegang, problemløsning og ræsonnement, så eleverne har “*en indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer specifikke matematiske udfordringer*”.

Om arbejdet med kompetencer står der i læseplanen blandt andet:

Den kompetencebaserede beskrivelse af matematisk faglighed er et alsidigt redskab i planlægningen og gennemførelsen af undervisningen på alle klassetrin.

I planlægningen fungerer kompetencebeskrivelsen dels til at fastsætte de dele af undervisningens mål, der vedrører de matematiske kompetencer, dels til valg af indhold.

I gennemførelsen fungerer beskrivelsen dels til at vælge forskellige tilgange til det samme indhold, dels til at perspektivere indholdet.

Det er altså vigtigt, at kompetencebeskrivelsen er inde i billedet både i lærerens forberedelse og i selve undervisningen. Og det er vigtigt, at den spiller sammen med de faglige emner.

Kompetencerne er både udtryk for matematisk faglighed og for matematiske arbejdsmåder. Lad os fx tage de to kompetencer *problembehandling og kommunikation*. En lærer, der i sin forberedelse tænker, at det er vigtige mål at sætte for undervisningen, har jo dermed også valgt noget om arbejdsmåder. Det er nødvendigt at få mulighed for at tale sammen om matematik. Og det er nødvendigt i

dialogen at finde frem til, hvori problemet består, og hvordan man mon kan løse det. Kompetencetænkningen får altså indflydelse på arbejdsmåden.
Lad os tage en lærer, der vil arbejde med brøkbegrebet i en 4. klasse. Og lad os forestille os, at han/hun samtidig har som mål, at eleverne skal blive gode til *at repræsentere brøker på forskellige måder* for derigennem at få en bedre forståelse for brøkbegrebet. Når først de to beslutninger er truffet, følger næsten automatisk et mål for måder at arbejde på. Læreren har jo med sin beslutning om at arbejde med forskellige repræsentationer også sagt, at eleverne skal kunne arbejde aktivt med konkrete materialer, it og tegninger. Når læreren i sin planlægning målsætter *repræsentationskompetencen*, kommer han/hun altså samtidig til at pege på og målsætte nogle arbejdsmåder.
Og flere kompetencer følger lige i hælene. *Hjælpemiddelkompetencen* er i spil, og *kommunikationskompetencen* er oplagt at fokusere på, når de forskellige repræsentationer er inde i billedet.
Kompetencemålene vil virke tilbage på valget af faglige elementer, for når læreren/eleven har valgt forskellige repræsentationer af fx og , vil nogle af repræsentationerne være velegnede til at forlænge og forkorte samt begyndende addition og subtraktion af brøker, mens andre repræsentationer ikke vil være så oplagte i den sammenhæng.

Læreren planlægger med kompetencerne
Lad os gå lidt tættere på lærerens planlægning med kompetencerne. Om kompetencebeskrivelsernes betydning for lærerens planlægning af *mål og indhold* står der i læseplanen:
Undervisningens mål og indhold skal give eleverne mulighed for at bygge videre på de matematiske kompetencer, som de allerede har ved skolestart, og som de efterhånden videreudvikler i skolen. Læreren må således overveje i planlægningen, hvordan mål og indhold tager hensyn til forskellige elevers forudsætninger og potentialer. Oftest vil det være hensigtsmæssigt at vælge "brede" mål og et "bredt" indhold for klassen som helhed, mens der til de enkelte elever kan knyttes mere specifikke forventninger.
Det er ofte hensigtsmæssigt at vælge aktiviteter, hvor flere kompetencer kommer i spil på samme tid. Sådanne aktiviteter kan bl.a. have form af undersøgelser, lege, spil og problemløsningsopgaver. Aktiviteterne skal rumme problemstillinger, der giver eleverne mulighed for at inddrage konkrete materialer og andre uformelle repræsentationsformer samt giver anledning til dialog om og med matematik. På den måde sigtes mod elevernes udvikling af problembehandlings-, repræsentations- og kommunikationskompetence.
En lærer, der planlægger sin undervisning, må altså planlægge ud fra at inddrage både det emnefaglige område og det kompetencefaglige område i sin måltænkning.
Lad os se på et eksempel, der kunne bruges på såvel begyndertrin som mellemtrin og afsluttende trin.
Et eksempel: Overfladen af stænger

- Lav en stang af fem centicubes. Hvor stor er overfladen?
- Hvor stor er overfladen af en stang lavet af 10 centicubes?
- Hvor stor er overfladen af en stang lavet af n centicubes?

Om selve opgaven – emnefagligt og kompetencefagligt

Opgaven handler om flere ting på én gang. Helt overordnet er der et problem, der skal løses: Hvordan finder man overfladen på centicube-stænger af forskellig længde?

Rent *geometrisk* handler opgaven om *overfladen af en stang*. Hvad betyder overflade? Hvor stor er overfladen? Hvordan finder man den? Kan der laves en regel?

Samtidig handler opgaven om *at arbejde undersøgende, systematiserende og ræsonnerende*.

Og hvis man kaster sig ud i at finde overfladen af mange centicube-stænger, er det svært ikke at føle trang til *at finde en regel* for, hvordan man finder overfladen. Nu handler opgaven altså også om at *generalisere*.

Desuden er det oplagt *at inddrage symbolbehandling*, når man har fundet en regel.

Om lærerens forberedelse – ud fra "lærerens 3 tankebobler"

Lad os se på, hvordan læreren kunne tænke på både geometri, kompetencer og arbejdsmåder i sit forberedelsesarbejde.

Hvordan kunne det rent praktisk foregå?

- Allerførst må læreren begive sig ind i problemet og gå i gang med at løse opgaven. Det er helt grundlæggende: Mens man selv løser opgaven, opdager man ikke bare, hvad løsningerne er, men også hvordan man kan arbejde for at finde dem. Forskellige læringsstrategier og muligheder dukker op, når man selv arbejder med problemstillingen. At arbejde med opgaven for egen fornøjelse og at gribe de tanker, der kommer undervejs, er en væsentlig del af forberedelsen
- I arbejdet med opgaven bliver læreren opmærksom på, hvilke centrale matematiske områder der er mulighed for at sætte fokus på. Lærerens måltænkning i planlægningsfasen kunne fx rumme følgende tanker.

Eksempler på geometriske mål kunne være:

1. At få styr på, hvad overfladen af en rumlig figur er
2. At vide, hvad det vil sige at finde, hvor stor overfladen er, altså arealbegrebet på en rumlig figur
3. At finde overfladen
4. At finde en regel for, hvordan man finde overfladen
5. At tænke videre til andre rumlige figurer: kasser, andre prismer, cylindere osv.

Eksempler på kompetencefaglige mål kunne være:

1. At kende typer af spørgsmål, der kan stilles, fx: Hvad vokser overfladen med, når stangen bliver 1 centicube større?
   Hvis overfladen på en centicube er 6, hvorfor er den så ikke 12, når stangen er på 2 centicubes? (tankegangskompetence)
2. At gå i gang med at løse problemet "på én eller anden måde", fx:
   At give sig til at tælle og skrive resultatet op
   At systematisere og generalisere: "Den vokser med 4 hver gang og begynder med 6" (problemløsning og tankegangskompetence)
3. At kunne håndtere "oversætte" fra hverdagssprog til symbolsprog, fx:
   Stangen på 5 centicubes har jo 5 "mavebælter" på 4 hver og så én i hver ende. Det bliver $5 \cdot 4 + 2$ (symbolbehandlingskompetence)
   Stangen på nmå altså være $n \cdot 4 + 2$ (symbolbehandlingskompetence)
4. At kunne ræsonnere, fx:
   Overfladen er 6 på hver af klodserne, så hvis der er n klodser, så skulle overfladen være 6n. Men der forsvinder jo 2 overflader hver

gang to centicubes sættes sammen, og det sker (n – 1) gange, så det bliver 6n – (n – 1) · 2 (ræsonnementskompetence og symbolbehandlingskompetence)

5. At kunne se forbindelsen mellem forskellige repræsentationsformer, fx:
   O = 4n + 2
   O = 6n – (n – 1) · 2
   Begynd med 6 og læg 4 til hver gang.

Eksempler på mål inden for arbejdsmåder kunne være at

1. arbejde undersøgende med at udvikle metoder
2. undersøge, systematisere og begrunde matematisk med mulighed for at inddrage konkrete materialer og andre repræsentationer
3. samarbejde med andre om praktiske og teoretiske problemstillinger
4. arbejde problemløsende i en proces, hvor andres forskellige forudsætninger og idéer inddrages.

Som det ses, hænger arbejdsmåder tæt sammen med kompetencer, og fokus på det ene vil næsten automatisk "kaste noget af sig" i forhold til det andet. Lærerens tre tænkebobler griber ind over hinanden, som modellen neden for viser.

Om undervisningen med kompetencer

Det kan virke overvældende med alle de mulige mål. Men læreren, der kender sin klasse, vil netop differentiere i forhold til de enkelte elever.

Blandt klassens elever kan der altså eksistere forskellige mål på samme tid. For nogle elever vil det være en passende udfordring at beskrive, at "overfladen vokser med 4 hver gang". For andre vil det være en passende udfordring at beskrive overfladen som 4 · n + 2. Der vil også være elever, der skal udfordres til at lede efter og sammenligne flere forskellige repræsentationer.

At differentiere kræver jo netop, at læreren har flere mulige mål i forhold til den samme problemstilling og det samme emne, og her er kompetencerne en fin hjælp. Den lærer, der står midt i undervisningen og skal støtte en elev videre i processen, kan ofte bruge andre repræsentationer, kan prøve at stille spørgsmål på en anden måde, kan bruge andre hjælpemidler, osv.

At læreren i sin planlægning har kompetencerne for øje som en del af elevens mål, giver derved ekstra muligheder for at støtte elevens læringsproces. De kompetencer, som er et mål for eleven, er netop de kompetencer, læreren kan bruge til at hjælpe eleven.

Der vil også ofte ske det, at undervisningen tager en anden drejning, end læreren først havde tænkt. Elevernes løsninger kaster nye muligheder af sig, som læreren griber.

Matematiklærer i folkeskolen

Kapitlet handler om dele af de udfordringer, der findes i enhver matematiklærers dagligdag. I størstedelen af teksten er omdrejningspunktet folkeskolelovens krav om, at undervisningen skal tilrettelægges, "*så den svarer til den enkelte elevs behov og forudsætninger*" (§18).
Dette princip, der generelt omtales som **undervisningsdifferentiering**, har bl.a. betydning for lærerens valg af

- målsætning(er)
- aktiviteter
- lærebøger
- organisationsform
- metoder til den løbende evaluering.

Disse valg omtales i det følgende i hvert sit afsnit. Kapitlet afsluttes med overvejelser over arbejdet med elever med særlige behov.

Målsætning(er)

Folkeskoleloven rummer en bestemmelse om, at på alle klassetrin og i alle fag "*samarbejder lærer og elev løbende om fastlæggelse af de mål, der søges opfyldt*" (§18.stk.4). Denne bestemmelse kan føre til en række spørgsmål vedrørende lærerens og elevens rolle i forbindelse med fastlæggelsen af mål for et konkret undervisningsforløb. Hvordan kan der i det hele taget være tale om et samarbejde, når målene tilsyneladende er fastlagt i Fælles Mål?

Trinmålene skal betragtes som lærerens **undervisningsmål** for hele klassen. Inden for rammerne af trinmålene fastlægges **læringsmål** for eleverne, der mere præcist beskriver, hvad eleverne skal søge at opnå viden om, eller hvad de skal søge at kunne. Disse læringsmål kan gælde for en gruppe elever eller for enkeltelever.

Der er altså tale om to betydninger af mål i et konkret forløb: Undervisningsmål som udvalgte trinmål, og læringsmål som elevgruppers eller enkeltelevers konkretiseringer af og handlinger inden for de udvalgte trinmål. Det er i forbindelse med læringsmålene, at der kan tales om samarbejde mellem lærer og elev om fastlæggelse af de mål, der søges opfyldt.

Det kan fx være et undervisningsmål, at eleverne deltager i *udvikling af metoder til multiplikation og division på baggrund af egen forståelse*. I den forbindelse kan det være et læringsmål for nogle elever, at de bliver i stand til at dividere ved hjælp af konkrete materialer, når dividenden er tocifret og divisoren er encifret. Samtidig kan det – med samme undervisningsmål – være et læringsmål for andre elever at dividere udelukkende med støtte i deres egne notater, når dividenden er op til femcifret, og divisoren er tocifret.

Målsætning bliver på den måde en vigtig brik i forbindelse med undervisningsdifferentiering. Undervisningsmålene må være brede nok til at rumme udfordringer for alle elever – og læreren må sammen med elevgrupper og enkeltelever løbende justere de læringsmål, der gælder for dem.

På et tidspunkt i et forløb om division kan det fx være passende for én eller flere elever at erstatte de konkrete materialer med illustrationer – eller måske at udvide det talområde, de arbejder inden for.

Det kan *ikke* betragtes som hensigtsmæssigt, at et helt klassetrin eller en hel skole vedtager specifikke læringsmål, der gælder for alle elever i en given klasse. Hvis det forventes, at alle elever i en klasse fx kan addere tocifrede tal i slutningen af 1. klasse, svarer det stort set til at forvente, at alle elever fx kan springe over 1 meter i højdespring. For nogle elever vil disse mål ikke rumme nogen udfordring, og for andre elever vil de være umulige at nå. For ingen af eleverne rummer en sådan måltænkning en fokusering på den talforståelse, der må betragtes som kernen i arbejdet med tal.

Hvis lærer og elev i samarbejde løbende skal justere læringsmålene, bliver det afgørende for læreren at have kendskab til elevens arbejde og tænkning. På den måde hænger målsætning uløseligt sammen med evaluering, som er omtalt senere.

For eleverne bliver det afgørende, at de har kendskab til undervisningsmålene for forløbet. Kun på den måde får de mulighed for at vurdere og komme med forslag til, hvad de hver især “kan klare” inden for undervisningsmålene. Hvis eleverne kun opfatter undervisningens mål som “at løse opgaverne i bogen”, vil de næppe kunne samarbejde med læreren om at arbejde målrettet mod at opnå en bestemt viden og kunnen.

Valg af aktiviteter

Princippet om undervisningsdifferentiering har også betydning for lærerens valg af aktiviteter i undervisningen. Læreren må vælge aktiviteter, der giver eleverne mulighed for at have forskellige læringsmål på samme tid.
Det betyder ikke nødvendigvis, at forskellige elever skal
arbejde med forskellige aktiviteter. Der findes en lang
række opgaver, som “i sig selv” giver plads til undervisningsdifferentiering.

Eksempel, 1. klasse:

Klassen arbejder med følgende undervisningsmål:

- *bestemme antal ved hjælp af addition, subtraktion samt enkel multiplikation og division inden for de naturlige tal*
- *løse matematiske problemer knyttet til en kontekst, der giver mulighed for intuitiv tænkning, inddragelse af konkrete materialer eller egne repræsentationer (problembehandlingskompetence)*
- *arbejde individuelt og sammen med andre om løsning af praktiske problemstillinger og matematiske opgaver.*

I den forbindelse har læreren valgt følgende oplæg til aktivitet:
“Hvilke regnestykker kan I finde, som giver resultatet 10?”
Først kommer nogle elever fra klassen med spontane forslag:
“5 + 5 giver 10”
“9 + 1 giver også 10”
Da læreren spørger, forklarer eleverne, at de kendte resultaterne på forhånd. Han beder en af eleverne vise, hvorfor 5 + 5 giver 10. Eleven holder sine hænder op i vejret:
“Man kan se, at 5 fingre på den ene hånd og 5 fingre på den anden hånd er 10 i alt… Vi har jo 10 fingre.”
Lærer: “*Kan I også vise 9 + 1 med fingrene?*”
Elev: “*1 finger og 9 fingre giver også 10 i alt* (viser med hænderne).
Lærer: “*Hvad hvis jeg har 4 fingre* (viser)? *Hvor mange mangler jeg for at komme op på 10?*”
Elev: “*1, 2, 3, 4, 5, 6*”.
I den næste periode arbejder nogle elever sammen to og to om at finde regnestykker, der giver 10 – andre elever arbejder alene. Læreren har i den periode mulighed for at støtte forskellige elever – med forskellige læringsmål – på forskellige måder.
Nogle elever har rigeligt at gøre med at tælle sig frem til stykker med to addender, der giver resultatet 10, og har svært ved at huske, hvordan et par af cifrene ser ud, når de skal skrive stykkerne ned. Læreren hjælper dem ved at tegne en “talstang”.

Andre elever har hurtigt fundet alle de additionsstykker med to addender, der giver 10. Læreren udfordrer dem ved at tegne sådan på et stykke papir:
____ + ____ + ____ = 10
____ – ____ = 10
Eleverne kan stadig tage fingrene til hjælp i forbindelse med den førstnævnte udfordring, men de får brug for centicubes til den sidstnævnte udfordring.
"*Hvis jeg har 12 centicubes, hvor mange skal jeg så fjerne for at komme ned på 10?*", spørger læreren, for at sætte dem i gang.
Endelig er der nogle få elever, læreren udfordrer sådan:
100 – ____ = 10
99 – ____ = 10
_____ + ____ – _____ = 10
_____ · _____ = 10
Læreren afslutter aktiviteten ved at bede eleverne skrive hver ét af deres stykker på tavlen. Han får nogle af eleverne til at fortælle, hvordan de har fundet frem til deres stykke.
Elevernes papir med deres regnestykker sættes ind i hver deres mappe, hvor de samler nogle af deres produkter. Læreren har mulighed for at bruge mapperne i sin løbende evaluering og i forbindelse med skole-hjemsamtaler.
Eksempel, 4. klasse:
Klassen arbejder med følgende undervisningsmål:

- *løse matematiske problemer knyttet til en kontekst, der giver mulighed for intuitiv tænkning, egne repræsentationer og erhvervet matematisk viden og kunnen (problembehandlingskompetence)*
- *sætte sig ind i og udtrykke sig såvel mundtligt som skriftligt om fremgangsmåder og løsninger i forbindelse med matematiske problemstillinger (kommunikationskompetence)*
- *arbejde med enkle eksempler på målestoksforhold og ligedannethed i forbindelse med tegning*
- *undersøge metoder til beregning af omkreds, areal og rumfang i konkrete situationer*
- *arbejde individuelt og sammen med andre om praktiske og teoretiske problemstillinger, problemløsning samt øvelser.*

I den forbindelse har læreren valgt følgende oplæg til aktivitet:
"Jeg skal bygge et kolonihavehus, som er 48 m2. Hvordan
kan grundplanen se ud?"
Aktiviteten indledes med at indkredse begreberne "kolonihavehus", "m" og "grundplan" i en fælles dialog. De taler også om, at grundplanen kan laves i et målestoksforhold, hvor 1 cm på papiret svarer til 1 m i virkeligheden. Læreren har medbragt et eksempel på en grundplan over et rektangulært hus i målestoksforholdet 1:100, og klassen beregner i fællesskab husets areal.
Eleverne kan derefter vælge forskellige stykker papir til at tegne deres forslag til kolonihavehusets grundplan. Nogle vælger kvadratpapir, som er 1 cm · 1 cm, fordi det giver dem mulighed for at tælle sig frem til det rigtige areal. Andre vælger kvadratpapir, som er 0,5 cm · 0,5 cm, fordi det giver dem mulighed for at tegne i halve meter. Endelig er der nogle, der vælger blankt papir, fordi det giver dem større frihed til at tegne "anderledes" grundplaner.

Mens eleverne arbejder med deres grundplaner, har læreren mulighed for at udfordre dem på forskellige måder.
Nogle kan tegne flere forskellige rektangulære løsninger. De opfordres til at undersøge, hvor mange forskellige løsninger, de kan finde, hvis husets vægge skal være et helt antal meter. Hvilke af løsningerne vil være gode at bo i?
Nogle kan tegne løsninger, hvor mindst én af væggene ikke er et helt antal meter.
Nogle kan tegne løsninger, som giver huset mere end fire hjørner.
Nogle kan tegne løsninger, hvor mindst en af husets vinkler *ikke* er rette.
Læreren bruger elevernes forskellige løsninger til at udvide aktiviteten:
"Hvem kan forklare os andre, hvordan jeres hus ser ud, når vi ikke må se tegningen?"
Nogle af eleverne fortæller på skift om deres løsning af opgaven. De andre elever i klasse forsøger at tegne efter deres mundtlige forklaringer. Eleverne får på den måde mulighed for at kommunikere med brug af matematikfaglige begreber.
"*Væggene er parallelle to og to… Der er fire vægge… Der er fire rette hjørner… Huset har form som en firkant…*", siger en elev.
"*Hvilken slags firkant?*", spørger en anden.
"*Et rektangel. To af siderne er 8 cm, og de sidste to sider er 6 cm. Døren sidder…*", fortsætter den første elev.
Husenes omkredse bliver også undersøgt. Når alle husene har arealet 48 m2, har de så også samme omkreds? Hvilket hus giver den største omkreds?

Lærebøger

I forbindelse med valg af aktiviteter kan en lærebog være til stor hjælp. En stor del af de lærebøger, som er på markedet, rummer aktiviteter, der giver plads til, at forskellige elever kan arbejde med forskellige læringsmål på samme tid – som det er beskrevet i det foregående.
Som matematiklærer er det imidlertid også vigtigt at være opmærksom på, at undervisningen ikke skal tage udgangspunkt i bøgerne – men i børnene og i det, de skal lære. I planlægningen af et forløb må læreren vurdere, om en bestemt lærebog har noget at bidrage med i forhold til den hensigt, læreren har med undervisningen.
Om en lærebog er "god", afhænger naturligvis af den situation, den skal bruges i. Det afhænger af læreren og af eleverne – og det afhænger af måden, den bliver brugt på.
De følgende spørgsmål er ment som en hjælp til at vurdere, hvordan en lærebog eller et undervisningsmateriale kan indgå i undervisningen. Det må forventes, at alle lærebøger i større eller mindre omfang må suppleres af lærerens egne idéer til aktiviteter i undervisningen.
Kriterier fra et læringsperspektiv:

- Bygger bogen på, at eleverne skal finde ud af, opdage, skabe matematik, eller fortæller den eleverne, hvordan tingene hænger sammen?
- Præsenterer bogen algoritmer, eller lægger den op til, at eleverne deltager i udviklingen af metoder?
- Giver bogen mulighed for, at eleverne kan arbejde problemløsende med opgaverne?
- Er bogens brug af materialer noget, der bare foreslås, eller inddrages det konkret?
- Kan der arbejdes på flere niveauer med den samme opgave?Er det muligt at arbejde med forskellige sproglige tilgange til samme opgave?
- Er det muligt at bygge på dialogen i bogens opgaver?
- Er der mulighed for at bruge det, der er lært, så eleven kan opnå en færdighed i det?

Kriterier fra et kompetenceperspektiv:

- Lægger bogen op til, at eleverne skal formulere og løse matematiske problemer?
- Lægger bogen op til, at samme matematiske emne fremstår i forskellige sammenhænge og repræsenteres forskelligt?
- Er det indbygget i bogen, at eleverne kommer til at kommunikere i, om og med den matematik, de er ved at tilegne sig?
- Hjælper bogen eleverne til at forstå den matematik, der ligger bag ved det aktuelle emne? Hvis fx et ræsonnement fører frem til resultatet, kan det helt centrale være, hvordan eleven har tænkt undervejs og ikke så meget, hvilket resultat eleven fik.
- Får eleverne mulighed for at arbejde med at frembringe, bruge og vurdere matematiske modeller?
- Kan der indgå regnetekniske hjælpemidler i arbejdet med bogen?

Kriterier fra et planlægningsperspektiv:

- I hvor høj grad hjælper bogen læreren til at undervisningsdifferentiere?
- Er der flere indgange til en opgave, flere muligheder for arbejdsmetoder undervejs og flere niveauer at afslutte på?
- Kan bogen anvendes i en gruppeorganiseret undervisning, hvor den enkelte elev kan bruge tid på og få hjælp til det, der er svært, eller er bogen opbygget, så læreren er nødt til fælles gennemgang en stor del af tiden?
- Lægger opgaverne op til, at der kan tales sammen om løsninger og metoder?
- Kan eleverne læse teksten selv og sætte sig ind i nogle af problemstillingerne?
- Kan bogen bruges sammen med andre bøger og materialer?

Kriterier fra et anvendelsesperspektiv:

- Giver bogen mulighed for, at eleverne anvender matematik for at løse problemstillinger uden for matematikken?
- Har bogen temaer, der inddrager "verden udenfor"? Er disse temaer "indpakning" for en bestemt matematisk aktivitet, der ikke har noget med sagen at gøre, eller er der mening i sammenhængen mellem tema og matematik?
- Bruges matematikken udelukkende til at svare på spørgsmål om "hvor mange", "hvor meget" og "hvor stor", eller bruges matematikken også til at svare på "hvorfor" og "hvordan"?

Andre undervisningsmidler

En lærebog kan ikke stå alene som undervisningsmiddel i en klasse. Der bør indgå andre supplerende skriftlige materialer. Desuden vil et udvalg af konkrete materialer være nødvendige for at gennemføre en kompetencebaseret matematikundervisning med vægt på eksperimenterende og undersøgende arbejdsmåder på alle klassetrin.
Anvendelsen af computer i undervisningen kræver, at der er et udvalg af relevante matematikprogrammer til rådighed. Hele it-området omtales nærmere i næste hovedafsnit.

Organisationsformer

Valg af organisationsformer er endnu et område, som har betydning for lærerens mulighed for at differentiere undervisningen.
Organisationsformerne skal bl.a. sikre, at læreren i perioder får mulighed for at tale med én eller med få elever ad gangen i lang tid nok til at kunne sætte sig ind i deres tænkning. Kun ved at vide, hvad eleven tænker, får læreren mulighed for at tage udgangspunkt i elevens forudsætninger og potentialer.
Mange matematiklærere har især på begynder- og mellemtrinnet oplevet, at det kan være vanskeligt at få denne tid sammen med enkeltelever eller med få elever ad gangen. Især kan det være problematisk, hvis mange elever har brug for hjælp på samme tid. Læreren

kan hurtigt blive til en person, der “springer rundt i klassen” og kun når at give korte informationer, inden han må videre til den næste, der har brug for hjælp.
For at imødekomme dette problem er det ofte en god idé at organisere undervisningen, så eleverne i perioder arbejder i grupper. En klasse med 24 elever kan fx deles i fire grupper, der ikke har den samme aktivitet. På den måde kan det planlægges, at lærerens hjælp er koncentreret omkring de grupper, som arbejder med opgaver, der kræver megen hjælp – eller med opgaver, som giver gode muligheder for, at læreren kan sætte sig ind i elevernes tænkning, ikke mindst de tosprogede elever.
Eksempel, 4. klasse:
Klassen arbejder med følgende undervisningsmål:

- *bruge uformelle og formelle repræsentationsformer og forstå deres indbyrdes forbindelser (repræsentationskompetence)*
- *deltage i udvikling af metoder til multiplikation og division på baggrund af egen forståelse*
- *anvende de fire regningsarter til antalsbestemmelse ved hjælp af hovedregning, lommeregner, it og skriftlige beregninger.*

Klassens 24 elever er delt i fire grupper:

- I gruppe 1 arbejder eleverne med at udvikle metoder til multiplikation.
- I gruppe 2 arbejder eleverne med at skrive eller tegne regnehistorier, der kan knyttes til multiplikation.
- I gruppe 3 arbejder eleverne med at automatisere den lille tabel ved at spille “gangebanko”.
- I gruppe 4 arbejder eleverne med gangestykker i et computerspil.

Arbejdet i gruppe 3 og 4 er aktiviteter, som eleverne i klassen alle er kendt med. Arbejdet i gruppe 2 er eleverne til dels kendt med, fordi de har prøvet noget tilsvarende i forbindelse med addition og subtraktion. Arbejdet i gruppe 1 er nyt for eleverne, og læreren fortæller på forhånd, at han mest vil bruge sin tid i denne gruppe. I gruppe 2 kan eleverne forvente at få noget hjælp, mens gruppe 3 og 4 så vidt muligt skal arbejde selvstændigt.
Grupperne arbejder på denne måde i det meste af en lektion. I næste lektion rokerer grupperne, så de i løbet af fire lektioner kommer igennem alle aktiviteterne.
Organisationen i grupper – eller i værksteder – giver også mulighed for, at eleverne kan arbejde med forskellige tilgange til det samme faglige emne. I 6. klasse kan det fx tænkes, at nogle elever har særlig glæde af at arbejde med ligningsløsning ved hjælp af fysiske handlinger med konkrete materialer, mens andre arbejder med ligninger med støtte i illustrationer, og andre igen arbejder med ligninger med udgangspunkt i det matematiske symbolsprog. Sådanne forskellige tilgange til læring omtaltes ofte som elevernes forskellige læringsstile.
I forbindelse med organisationsformer, der baserer sig på elevernes læringsstile, er det vigtigt at være opmærksom på, at den centrale aktivitet for alle eleverne er deres tænkning – ikke de fysiske handlinger. Eleverne lærer fx ikke multiplikation ved at kaste en bold til hinanden eller ved at synge tabelsange – men ved at de gennem tænkning forbinder det nye begreb med viden, de allerede har gjort til deres egen. Aktiviteter med konkrete materialer eller med illustrationer kan støtte elever til dette, mens boldkast og tabelsange højst hjælper nogle elever til at lære udenad.
De omtalte organisationsformer er især egnede til arbejdsformer, der baserer sig på opgaveløsning eller på elevers mere undersøgende arbejde. Gruppedelingerne kan både bruges til samarbejde og til elevernes individuelle arbejde.
I perioder eller i sekvenser, hvor undervisningen baserer sig på klassens dialog, er det naturligvis oplagt, at klassen arbejder samlet med læreren som leder. Læreren har i denne organisationsform mulighed for at inddrage elevernes forskellige input i dialogen ved fx at spørge,

reformulere og konkludere på baggrund af elevernes input. I en sådan undervisning bidrager elevernes forskellighed til at lægge forskellige perspektiver på den faglige samtale.

Den løbende evaluering

I folkeskolelovens § 13, stk. 2, omtales en bestemt form for evaluering: *"Som led i undervisningen skal der løbende foretages evaluering af elevernes udbytte heraf... Evalueringen skal danne grundlag for vejledning af den enkelte elev og for den videre planlægning og tilrettelæggelse af undervisningen."*

Denne form for evaluering, der ofte omtales som "formativ evaluering", kan betragtes som en integreret del af et undervisningsforløb og hænger uløseligt sammen med undervisningsforløbets undervisningsmål og læringsmål, da evalueringen er rettet mod disse mål.

Den formative evaluering er fremadrettet, og hensigten er at kvalificere både elevernes og lærerens arbejde og samspillet her imellem.

I forbindelse med den formative evaluering er det derfor ikke nok at konstatere, om eleven kan eller ikke kan løse en given opgave. Denne evalueringsform må give læreren et mere nuanceret indblik i elevens styrker, svagheder og potentialer – på, hvad der "virker", og hvad der "ikke virker". Er der tilgange til det faglige emne, der er særligt fordelagtig for eleven? Er der arbejdsformer, som skal vægtes særligt i den kommende undervisning? Skal der fokuseres specielt på bestemte kompetencer i fremtiden?

Grundlaget for den formative evaluering kan fx være:

- Observationer af elevernes arbejde, fastholdt med lærernoter
- Samtaler med klasse, hold, grupper eller enkeltelever
- Samtaler med elever på grundlag af opgaver, de har løst
- Samtaler med elever på grundlag af logbøger
- Udvalgte produkter, evt. i en portfolio
- Elevers præsentationer
- Spørgeskemaer
- Videooptagelser.

Hvis opgaver danner baggrund for den formative evaluering, er det naturligvis afgørende, at opgaverne giver mulighed for at evaluere det, der er hensigten.

Hvis man fx i en 8. klasse ønsker at evaluere elevernes viden og kunnen inden for trinmålet: *atarbejde med funktioner i forskellige repræsentationer*, giver det ikke mange informationer, hvis eleverne kun bliver bedt om at tegne grafen for y = 7,50x i et koordinatsystem.

En anden mulighed er den følgende opgave:

Grafen viser sammenhængen mellem euro og danske kr.

1. Giv eksempler på, hvad du kan læse af grafen.
2. Vis sammenhængen mellem euro og danske kr. på andre måder, du selv vælger.
3. Forklar, hvilke fordele og ulemper du kan se ved de forskellige måder at vise sammenhængen på.

Mens den førstnævnte opgave kun giver eleven mulighed for at vise en færdighed, giver den sidstnævnte opgave eleven mulighed for både at vise færdigheder og for at vise, om han/hun kan anvende disse færdigheder i den beskrevne situation. Endelig giver den sidstnævnte opgave også eleven mulighed for at forholde sig kritisk til de forskellige repræsentationsformer, han/hun vælger.

En kort samtale med eleven, der har arbejdet med den sidstnævnte opgave, vil således give et langt mere nuanceret billede af hans/hendes viden og kunnen i forbindelse med undervisningsmålet.
Den sidstnævnte opgave illustrerer, at viden kan foreligge på flere forskellige niveauer. Forskere har forsøgt at beskrive disse forskellige niveauer på forskellige måder. En af niveaubeskrivelserne er:

- Fakta
  (kendskab af kvantitativ karakter – fx vide, hvad en "graf" er)
- Færdighed
  (indsigt, der har at gøre med, hvordan operationer udføres – fx kunne tegne en graf i et koordinatsystem ud fra en funktionsforskrift)
- Forståelse
  (indsigt af kvalitativ karakter – fx kunne sammenligne og vurdere de informationer, forskellige repræsentationer af funktioner giver)
- Fortrolighed
  (indsigt, der medfører, at eleven på grundlag af sin faktaviden, færdigheder og forståelse kan træffe kvalificerede valg i forhold til en given problemstilling – fx vælge den repræsentationsform, der ifølge elevens begrundelser giver den mest brugbare information)

Traditionelt har matematiklærere hovedsageligt evalueret ved hjælp af test, hvor eleverne kun får mulighed for at vise faktaviden og færdigheder. Kompetencebeskrivelsen af faget matematik og trinmålene i Fælles Mål sigter på et højere kundskabsniveau, og de evalueringsformer, der anvendes, må derfor være i overensstemmelse hermed. Det betyder, at læreren i evalueringen af eleverne skal have fokus på, at eleverne får mulighed for at vise viden og kunnen på forståelses- og fortrolighedsniveau. Derfor kan de test, som udelukkende viser faktaviden og færdigheder, ikke stå alene i den løbende evaluering. Der skal som nævnt ovenover mange andre evalueringsformer og evalueringsmetoder i spil.
En for stærk fokusering på fakta- og færdighedsprøver kan desuden medvirke til, at der i praksis sker en indsnævring af opmærksomheden på hele matematikfagets område. Al erfaring tyder på, at det, der testes i, er det elevernes og lærerens opmærksomhed rettes mod.
Der er en tæt sammenhæng mellem vidensniveauet "fortrolighed" og med kompetencebegrebet. Men mens "fortrolighed" knytter sig til viden om bestemte faglige begreber eller fagområder, fokuserer kompetencebegrebet i højere grad på matematikkens grundlæggende natur.
Graden af kompetence – eller ekspertise – kommer ikke til udtryk i et simpelt facit eller i afkrydsning af et sandt udsagn. Hvis den løbende evaluering af elevernes kompetencer fx baserer sig på opgaver, må det være opgaver, hvor eleverne kan svare mere eller mindre nuanceret – som i opgaven ovenover for 8. kl. vedrørende funktioner i forskellige repræsentationsformer. Denne opgave vil – sammen med en kort samtale med eleven – kunne give læreren tegn på elevens repræsentationskompetence. Råder eleven fx over forskellige repræsentationer for funktionen? Kan eleven formulere sammenhænge og forskelle mellem de forskellige repræsentationer? Kan eleven anvende repræsentationerne i kendte sammenhænge? I ukendte sammenhænge? Forholder eleven sig kritisk til sin anvendelse af de forskellige repræsentationer?
De forskellige tegn – eller manglende tegn – på elevens repræsentationskompetence vil læreren kunne anvende i sin kommende planlægning.
På Skolestyrelsens evalueringsportal www.evaluering.uvm.dk kan læreren finde mange artikler om evaluering, både generelt og fagspecifikt. Der er beskrevet mere end 20 forskellige evalueringsredskaber, og der er et stort antal eksempler på evaluering i konkrete situationer.

Den løbende evaluering skal indgå i elevplanen. Det medfører, at der skal være en vis skriftlighed i evalueringen, der kan anvendes på en enkel måde i den skriftlige elevplan til forældrene. Fx kan eleverne arbejde med en præsentationsportfolio suppleret med en logbog, der også rummer den enkelte elevs planer for det kommende arbejde. Efter en samtale mellem lærer og elev kan en portfolio og logbog blive elevplanen.

Elever med særlige behov

Det er en stor udfordring for matematiklæreren at undervise på en måde, der tilgodeser alle elevers forskelligheder i en klasse. Eleverne har ikke samme udgangspunkt i forhold til det at lære matematik. Nogle arbejder hensigtsmæssigt med det, læreren har planlagt for timen, andre synes at være gået helt i stå, mens atter andre virker til at kunne det hele i forvejen.

Der bliver brugt forskellige ord om det at have vanskeligheder i matematik. En klar, entydig og alment anvendt definition af matematikvanskeligheder findes endnu ikke. Elever med vanskeligheder i faget matematik bør have særlig opmærksomhed af matematikuddannede lærere, og evt. efterfølgende specialundervisning bør ligeledes varetages af matematiklærere med specialuddannelse. Ofte søges matematikvanskeligheder afdækket med en test, men en test med fokus alene på resultatet viser hverken, hvori vanskelighederne grundlæggende består, eller hvordan de skal afhjælpes.

Uanset hvad årsagerne kan være til elevers matematikvanskeligheder, findes der mange forskellige måder at hjælpe en elev videre på. Det er vigtigt, at den hjælp matematiklæreren giver, bygger på det, eleven kan, og på elevens styrkesider.

Dette skal ses i modsætning til, at specialundervisning ofte har bestået i at sætte eleverne til at regne i en matematikbog for nogle lavere klassetrin – uden at undersøge, hvad eleven egentlig kan og ikke kan. Det er udbredt at tænke, at forståelsen kommer efterhånden, hvis eleven bare træner længe nok. Der er kun lidt eller ingenting, som tyder på, at det er rigtigt. Det giver ikke mening at blive ved med at fastholde elever i situationer, hvor de ikke har succes. I stedet for at give eleverne en masse regnestykker, kan det være væsentligt, at de lærer nye og hensigtsmæssige strategier.

Hvis eleven skal hjælpes videre på en kvalificeret måde, kræver det, at læreren sætter sig ind i elevens tankegang. Det vil for det meste kræve, at læreren går i dialog med eleven om matematikken. I dialogen er det muligt at få indblik i, hvilke strategier eleven har anvendt. "Hvad tænkte du, da du løste den opgave?" "Fortæl lidt mere om, hvordan du regnede der…" I dialogen bliver det klart for både lærer og elev, hvor eleven er henne i forhold til det faglige område. Eleven bliver klar over sin tænkning, hvad han/hun har forstået, og læreren får indblik i, hvilket forståelsesgrundlag der er at arbejde videre ud fra, og kan tilrettelægge undervisning ud fra dette.

Læreren har altså mulighed for i dialogen med eleven at lytte sig til en væsentlig indsigt. Spørgsmålet er da, hvordan det er muligt at skabe plads for sådanne dialoger i den daglige matematikundervisning? Nogle har tolærertimer, hvor det er muligt for den ene lærer at tage tid til sådanne dialoger. Andre har mulighed for at trække på matematikvejlederen eller evt. en kommunal matematikkonsulent, men mange vil være nødt til selv at skabe rum for sådanne dialoger. Læreren må organisere sig til muligheden for at komme tæt på den enkelte elev. Læreren kan sætte klassen i gang med at arbejde med opgaver, der ikke kræver anden hjælp end den, eleverne kan give hinanden, og således skabe rum for små dialoger med enkelte elever.

Alle elever kan lære mere, men hvad, der er relevant at lære lige nu, og hvor hurtigt, er forskelligt. Når fokus sættes på, hvad der kan lade sig gøre, frem for på manglerne, vil der automatisk blive lagt vægt på læringspotentialet, og hensigten med undervisningen er i fokus. Det er således ikke relevant at tænke på, hvad eleverne ikke kan, men på hvad de kan – og hvad de har mulighed for at lære.

Det bliver vigtigt for læreren at lede efter elevernes ressourcer, for der er altid ét eller andet at bygge videre på. Det er vigtigt at finde dette "et eller andet", for én af de mest centrale faktorer i læringen er at få tidligere erfaringer og det, der vides på forhånd, i spil.

Elever med vanskeligheder i matematik tænker også, men nogle gange tænker de på en anden måde end den, der forventes af dem. Læreren må hjælpe eleverne med at skabe mening i arbejdet med matematik og støtte dem til at tro på, at de kan lære. Ofte er en del vanskeligheder overvundet, når eleverne får tillid til, at de kan noget matematik.
Det er vigtigt, at læreren ikke kun lytter til de elever, der har vanskeligheder i matematik – alle elever har glæde af dette, også de allerdygtigste. Det er væsentligt, at de ikke bliver dem, der aldrig har lektier for, og altid skal hjælpe de andre. De må også have udfordringer – der er altid mere at lære, også for de dygtige.
Læreren kan fx supplere med en anden type opgaver til de elever med faglig udfordring på et andet niveau. Men for at bevare det matematiske fællesskab i klassen er det også vigtigt at arbejde med de samme problemstillinger i hele klassen, og det kræver, at det er problemstillinger, hvor det er muligt at differentiere. (Se afsnittet, "Valg af aktiviteter" ovenover).
Læreren kan gøre det til sin vane at tænke om opgaverne: *"Hvordan kan jeg gøre opgaven lettere? Hvordan kan jeg gøre opgaven sværere? Hvordan er det muligt at have forskellige tilgange til denne opgave?"* På den måde bliver differentieringsmuligheder tænkt ind i klassens arbejde, hvilket ikke mindst kan have stor betydning for mange tosprogede elever.
Det er positivt for hele læringsmiljøet i klassen, når nogle – måske nogle af de dygtige – griber en udfordring og bliver lidt "matematisk frustrerede", fordi nødden er lidt svær at knække. Et enkelt hint fra læreren i problemløsningsprocessen kan hjælpe eleven videre, så eleven stadig har ejerfornemmelse for løsningen af problemet. Læreren må altså have øje for dem, der skiller sig ud, hvad enten det er pga. matematikvanskeligheder eller pga. et matematikoverskud. De kan alle lære mere.
Hvordan når vi derhen, hvor eleverne faktisk ønsker at lære mere? Mange elever tænker, når de er gået i stå: "Det er noget med, at man skal…" Det er et udtryk for, at de leder efter en bestemt måde eller måske en metode, som man gør tingene på i klassen. Hvordan får vi elever, der "overtager problemet" og selv arbejder aktivt på at finde en løsning i stedet for at prøve på at komme i tanke om noget, som de egentlig ikke har forstået? Hvordan får læreren skabt et læringsrum, hvor alle elever – også dem med matematikvanskeligheder – vil være med?
Alle elever har noget at bidrage med til det matematiske fællesskab, hvis læreren forstår at opfange de "guldkorn", der falder fx i en fælles klassesamtale, og bidrage til et arbejdsklima, hvor fejl er velkomne og kan blive udgangspunkt for en læringssamtale, og hvor det bliver naturligt for eleverne at markere: "Jeg har altså gjort det på den måde." "Men jeg gjorde sådan."
Læreren kan vælge sin holdning til matematikundervisning og vælge sit syn på eleverne. Læreren kan vælge at betragte sin klasse som en flok elever, der er håbløst bagud, eller som en flok elever med potentiale til at udvikle matematiske kompetencer. Læreren må give eleverne modet til at prøve deres idéer af, at tage de andre i klassen med ind i "på-vej-tankerne" – altså de tanker, som er på vej til at blive klare – de tanker, som står klarere, når de bliver sagt højt.
Læreren kan betragte sig selv som én, der også er i en læringsproces, hvor hensigten bl.a. er at lære mere om elevernes læring og tilgang til matematik, men måske rejses der også nogle gange spørgsmål i en matematiktime, som elever og lærer sammen kan undersøge. Læreren kan vise en nysgerrighed i forhold til elevernes tænkning og læring så tydeligt, at det vækker deres nysgerrighed i forhold til at lære endnu mere matematik. Det bliver på en måde en form for "smittende nysgerrighed", der bliver omdrejningspunktet.

Dansk som andetsprog i matematikundervisningen

Ethvert fagområde har sit særlige sproglige register, dvs. de sproglige mønstre der gør sig gældende, når fagfolk bruger sproget, og som er bestemt af fagets genstandsområde og den funktion, faget har. Dette faglige register kommer til udtryk i bl.a. teksters opbygning, mundtlige og skriftlige formuleringer og det fagspecifikke ordforråd. I klasser med tosprogede elever må faglæreren derfor tilrettelægge en undervisning, som skaber gode betingelser for tilegnelse af det faglige såvel som det fagsproglige stof. Tosprogede elever har for manges vedkommende kun fagundervisningen til at tilegne sig det faglige register, inkl. de førfaglige ord, og deres udgangspunkt på andetsproget er ofte utilstrækkeligt i forhold til, hvad der forudsættes i undervisningen og i fagteksterne.
Det betyder, at nogle tosprogede elever ikke har de sproglige ressourcer på andetsproget, som skal være på plads for at tilegne sig det nye sprog, nemlig fagsproget, og konsekvensen er, at de skal tilegne sig nyt vha. nyt.
Ud over de egentlige fagudtryk, som er nye for alle elever, rummer fagsprog sædvanligvis mange ord og begreber, som ikke er hyppigt forekommende i hverdagssproget, og derfor ikke nødvendigvis beherskes på andetsproget dansk. Det er de såkaldte førfaglige ord og begreber, fx *landbrug, cirkel, fjer.*
Forud for tilrettelæggelsen af et undervisningsforløb bør man overveje, hvilke fagsproglige udfordringer der ligger i det pågældende tema:

- Hvilke fagsproglige mål kan der opstilles for et givent emne? Hvilket relevant fagsprog skal eleverne tilegne sig gennem undervisningen?
- Hvilke kommunikative mål lægges der op til i trinmålene?
- Hvilke sproglige kompetencer skal eleverne have for at læse fagteksterne? Kender de fx de relevante ord og begreber? Og kender de den særlige måde, hvorpå en fagtekst formidles i det pågældende fag.

Hvad kan matematiklæreren gøre? Samarbejde med læreren med dansk som andetsprog eller dansklæreren er åbenlyst. Men er disse ikke til stede i matematiktimerne, kan matematiklæreren være opmærksom på fx at:

- anvende kropssprog
- anvende visuelle repræsentationer som tegn, symboler, billeder, kort, konkrete materialer osv.
- tale langsomt i nøglesituationer
- give ekstra opmærksomhed på vigtige ord
- knytte kendt til ukendt
- spørge ind til elevens eget sprog.

Specielt i faget matematik er der mange muligheder for at give tosprogede elever gode betingelser for at lære faget. Faghæftet giver mange eksempler på og anvisninger af, hvordan matematiklæreren skal tilrettelægge en undervisning, der tilgodeser alle elevers læring. Meget af dette vil også tilgodese elever med dansk som andetsprog.

Foraeldresamarbejde

Matematik er et fag, som forældre ofte synes, det er svært at hjælpe deres børn med. Det hænger sammen med flere ting. Nogle forældre er ikke lykkedes med matematik selv og har derfor problemer med matematik i voksenlivet. De fleste forældre har desuden kun erfaringer med deres egen matematikundervisning og har måske svært ved at forstå og følge med i den udvikling, som matematikundervisningen hele tiden gennemgår. Der er et forhold, det er vigtigt, at både læreren og forældrene forholder sig til: Undervisningen skal først og fremmest foregå i skolen og varetages af læreren. Forældrene kan så støtte deres barn på andre måder, fx ved:

- Træning af det lærte, fx tabeller
- Undersøgelser af ting og forhold, der skal bruges i skolen dagen efter, fx familiens elektricitetsforbrug

- Deltagelse i familiens dagligdag, hvor der bruges matematik
- Spil og lege, hvor der skal bruges forskellige former for matematik.

Faglig-didaktiske områder

Tal og algebra
Menneskets evne til at benytte symboludtryk i mundtlig og skriftlig kommunikation er en væsentlig forudsætning for vores kultur. Arbejdet med tal og algebra skal ses i denne sammenhæng.
Studiet af tal og relationer imellem tallene er udgangspunktet for den del af undervisningen, der sigter mod at give eleverne en begyndende indsigt i algebraen. Undervisningen må tilrettelægges, så eleverne får indsigt i – og i en vis forstand selv oplever – hvordan menneskene har skabt tallene, og hvordan tallene benyttes til at beskrive forhold fra virkeligheden.
Fra den første forståelse af de naturlige tal til indsigt i de rationale tals verden og videre frem mod "nye" tal som $\sqrt{2}$ og π er der et utal af små og store trin at passere. Tilmed er det sådan, at der er mange forskellige trapper at bevæge sig ad, og læreren skal sammen med den enkelte elev søge at finde en farbar vej. Alle elever skal få et indtryk af hele det spektrum, som tallene udgør.
Fra tal til algebra
Når børn fx leger købmand og tæller, hvor mange penge de har, gør de erfaringer med forskellige måder at regne på. De kan få behov for at overveje, om de har penge nok. Med lærerens hjælp flytter de sig gradvist fra beskæftigelsen med de konkrete problemstillinger til at gøre sig overvejelser på et mere generelt og overordnet plan. Bevægelsen går fra konkrete situationer med fx legepenge til bl.a. metoder, der generelt kan anvendes til addition – fra det konkrete mod det generelle.
Elevernes arbejde med regler for behandling af tal vil også senere i skoleforløbet kunne foregå i nær tilknytning til dagligdags problemstillinger, der således kan blive et tænkeredskab for den enkelte elev:
Hakket oksekød: pr. kg 65,-
Hvis opgaven går ud på ud fra annoncen at beregne prisen på 600 gram hakket oksekød, skal teksten først afkodes. Eleverne skal kunne forstå tallenes betydning i den sammen hæng, de indgår, og derefter skal de vælge regningsarter og udføre regneoperationer. Man kan sige, at der skal vælges en matematisk model til løsning af problemet. Endelig skal resultatets rimelighed vurderes.
Eleverne kan undervejs vælge forskellige nedskrivninger af regneudtryk for beregningen:
$65 : 1000 \cdot 600 = 39$

$65 : 10 \cdot 6 = 39$

$65 \cdot 0{,}6 = 39$
Er alle tre udtryk svar på opgaven?
Samtaler herom vil være væsentlige led i opbygningen af en forståelse af det algebraiske sprog, og sådanne overvejelser er forudsætningen for, at algebraen på de ældste klassetrin for eleverne kommer til at fremstå som en måde at beskrive virkelighedens fænomener på.
Hvis der fx diskuteres fartgrænser, ved de fleste elever, at såvel en bils fart som dens vægt har betydning for, hvor kraftigt et eventuelt sammenstød bliver. Her kan energisætningen:

$E = \frac{1}{2}mV^2$

bruges til at belyse, hvordan en ændring af farten V påvirker energien for en bil med massen *m* og dermed sammenstødet. Gennem algebraiske overvejelser kan eleverne indse ved at arbejde med formlen, at farten betyder langt mere end massen for energimængden. Dette kan evt. tydeliggøres ved at tegne en graf.

I de beskrevne eksempler er peget på, hvordan arbejdet med tal og algebra på forskel lige klassetrin kan indgå, når problemstillinger fra dagligdagen behandles. Dette kan ses i modsætning til en undervisning, der udelukkende tilrettelægges med den hensigt at kunne løse rene talopgaver og senere at kunne manipulere med bogstavudtryk.

For eleverne skal algebra blive til et sprog, som de kan læse og forstå i forbindelse med formler og anvende i forbindelse med beskrivelse af generaliseringer og sammenhænge. Det skal blive til et redskab, der kan bruges til løsning af praktiske og teoretiske problemer.

Det er derfor ikke tilstrækkeligt at kunne "rykke rundt" på symbolerne ved at følge nogle bestemte regneregler. Arbejdet med algebra kan ikke ses som isolerede øvelser i bogstavregning. På den anden side bliver algebra ikke til et anvendeligt sprog eller til et brugbart redskab, hvis man ikke kan omskrive symboludtryk.

Arbejdet med algebra kan ses som cirkulært. Arbejdet
består af faser med

- oversættelse af en hændelse eller en problemstilling til et algebraisk udtryk
- omskrivning af symboludtryk
- tolkning af symboludtryk (der igen knyttes til hændelsen eller problemstillingen)

Det er altså nødvendigt at kunne håndtere alle faser af den algebraiske cyklus, hvis algebra skal blive et brugbart sprog og redskab.

Udvikling af beregningsmetoder

Elevernes arbejde med de naturlige tal knytter sig til praktiske situationer fra hverdagen, spil og lege, men kan også have udgangspunkt i børnenes fantasiverden og i regnehistorier. De møder herigennem de fire regningsarter som redskaber, de har brug for til løsning af mange forskellige problemer.

Indtil fremkomsten af lommeregneren har man betragtet skriftlige udregninger i bestemte opstillingsskemaer som en selvfølgelig del af de almene kundskaber.

Den lette adgang til lommeregnere og computere medfører, at hensigten med talarbejdet er ændret. Elevernes arbejde med beregningsmetoder sigter mod deres forståelse af regningsarternes anvendelse, mod deres talforståelse og mod deres udvikling af generelle matematiske kompetencer. Det er *ikke* et mål, at eleverne kan bruge bestemte algoritmer til beregning.

I arbejdet med beregningsmetoder kan eleverne bruge konkrete tællematerialer, illustrationer og et mere formelt symbolsprog i et samspil. Udgangspunktet bør være en bred variation af situationer og regnehistorier.

Regnehistorier kan i de mindre klassetrin være lærerens mundtlige fortællinger, der rummer et problem, der skal regnes på. Eleverne kan også forberede lignende fortællinger til hinanden. Historierne kan både være fantasifulde og virkelighedsnære. I elevernes arbejde med at løse en histories problem bruges både hovedregning, konkrete materialer, tegninger og uformelle notater. Senere i skoleforløbet kan historierne blive skriftlige. I overbygningen kan regnehistorierne blive til elevfremstillede opgavesæt, som kan ligne afgangsprøverne.

I skolen mødes den enkelte elevs uformelle viden og kunnen med matematikkens faglige begreber. Det er vigtigt, at de faglige begreber bliver forbundet med elevernes forforståelse eller førfaglige begreber. Det er vigtigt, at eleverne præsenteres for forskellige problemer, der løses med samme regningsart, således at eleven med tiden kan genkende nogle af de problemtyper, der udløser en bestemt regningsart.
En åben tilgang til arbejdet med at løse problemer fra elevernes dagligdag og fra regnehistorier kan samtidig være med til at styrke elevernes tro på, at de med udgangspunkt i deres egen viden kan løse et problem. For læreren betyder arbejdsformen, at der hele tiden må tages stilling til, hvilke elever der kan bydes nye udfordringer.
Måske er tidspunktet i en klasse i indskolingen kommet til et større fælles undersøgelsesarbejde, hvor eleverne arbejder med uformelle regnestrategier, og hvor eleverne benytter lommeregneren som hjælpemiddel:

- Hvor mange gange skal du trykke på 2 og + for at få 20? 30? 40?
- Kan du også ramme 21? 22? 23?
- Kan du ramme 48 ved at trykke på 2 og +?
- Kan du ramme 48 ved at trykke på 3 og +?
- Hvor mange gange skal du trykke?

I forbindelse med arbejdet med regnemetoder bør man være opmærksom på, at læreren har til opgave at udfordre den enkelte elev til aktiv deltagelse i udvikling af regnemetoder. Læreren skal således ikke overlade det til eleven selv at "opfinde" en regnemetode, men støtte ham til at tænke videre ud fra egne tanker og strategier. Lærerens støtte skal ikke være introduktion af bestemte standardalgoritmer.
Læreren skal være bevidst om, at selve udformningen af en beregningsmetode vil ændre kravet til talforståelsen, fx når opstillingen i fx en simpel addition forandres fra vandret til lodret opstilling:

43 + 6 = ______

43
+ 6

______

______

I den første opstilling skal eleven overveje, om "6" skal parres med "3 enere" eller med "4 tiere", mens man i den anden opstilling helt kan udelade denne overvejelse. Natur ligvis kan man sige, at den sidste opstilling er praktisk, men det fremmer næppe talforståelsen at starte med at indlære en sådan standardalgoritme.
Ser man isoleret på arbejdet med træningsopgaver i udregninger inden for de fire regningsarter, har dette normalt ikke haft til formål at give eleverne indsigt i algebraen. Arbejdet havde alene det sigte at give eleverne sikkerhed i det, som lommeregnere og computer nu kan klare. Formålet med at arbejde med beregningsmetoder er at øge elevernes talforståelse og stigende indsigt i algebraen. Formålet er ligeledes, at den enkelte eleverne er med til at udvikle beregningsmetoder, der bygger på deres forståelse, og som de kan huske og håndtere. Således vil der i en klasse arbejdes med flere forskellige regnemetoder, og det er lærerens opgave at støtte den enkelte elev i dette arbejde.
For eksempel er en gruppe elever i 3. klasse i gang med at lægge et budget for en lejrskole. De er ved at undersøge udgiften pr. elev for en uge, når det koster 240 kr. for én dag.

Valg af regningsart bliver det første, de skal bestemme sig for. Én elev vælger addition, og de andre multiplikation. Ved hjælp af lommeregneren finder de frem til, at prisen bliver 1680 kr.
Læreren vælger på et tidspunkt at tale med hele klassen om problemet. Specielt tales om, hvordan man uden brug af lommeregner kan beregne prisen. En elev foreslår først, at man kan regne med cirkatal og sige, at 7 · 200 er 1400. Man drøfter dette og bliver enige om, at cirkatal ikke er nok i dette tilfælde, da man gerne vil have en præcis pris pr elev.
Uden at præsentere en beregningsmetode beder læreren eleverne om at finde det præcise resultat af multiplikationen 7 · 240. Det resulterer bl.a. i disse notater på elevernes papirer:

Ved at analysere metoderne kan man se, hvordan eleverne har benyttet forskellige algebraiske regler. Det er tydeligt, at der ikke tidligere i klassen har været undervist i brugen af en bestemt beregningsmetode, så det må formodes, at eleven, der har benyttet en af de sædvanlige korte algoritmer, har lært den andetsteds. En samtale med eleven vil afsløre, om den algebraiske side af metoden er forstået.
Læreren kan i samtale med eleverne om de forskellige beregningsmetoder bringe en begyndende sammenhæng over til den sædvanlige brug af algebraiske notationsformer på banen. Samtidig kan de forskellige opstillinger drøftes med henblik på en udvikling af hensigtsmæssige metoder. Eksempelvis er det let at blive enige om, at den lodrette opstilling af på hinanden følgende addender vil blive uhensigtsmæssig, hvis der er tale om 52 · 240. Fælles for drøftelserne er at betragte hver opgave som et lille problem, der skal løses ud fra kendte regler. Senere kan mere formelle betragtninger komme på tale. Fx at
$7 \cdot 240 = 7 \cdot (200 + 40)$
Målet for undervisningen er, at eleverne får mulighed for at deltage i en proces, hvor de kan udvikle metoder, så udregningen gøres lettere. I processen arbejder de samtidig med generelle regler for regning med tal. Regler som senere spiller en rolle i et mere formelt arbejde med algebra.
Det vil være hensigtsmæssigt for læreren at planlægge elevernes deltagelse i udviklingen af metoder til fx multiplikation over flere år. I kapitlet med undervisningsforløb er der et eksempel på, hvordan læreren kan undervise i multiplikation over en 4-årig periode.
Arbejdet med tal og algebra kan i mange situationer støttes ved at benytte forskellige repræsentationsformer. Fx kan multiplikationen 6 · 17 repræsenteres geometrisk ved et rektangel opbygget af 6 kvadrater langs den ene kant og 17 kvadrater langs den anden.
En anden mulighed vil være at bygge videre på den grundlæggende definition af multiplikation som en addition:
$6 \cdot 17 = 17 + 17 + 17 + 17 + 17 + 17$
Her mister man imidlertid det visuelle, det geometriske, som for mange elever udgør en væsentlig forklaringsmodel, også når det drejer sig om algebraiske forhold.
Set i en kulturel sammenhæng gav indførelsen af koordinatsystemet anledning til at knytte forbindelse mellem tal og geometri. Også i undervisningen har det vist sig, at denne sammenknytning har stor værdi for elevernes forståelse af matematikken.
En fremstilling af 6-tabellen som en grafisk afbildning af $y = 6x$ i et koordinatsystem vil således kunne give ny indsigt. Herefter kan yderligere undersøgelser gennemføres ved at tegne grafer for $y = 7x$, $y = 10x$, osv. Der kan drages konklusioner på grundlag af sammenligninger. I dette arbejde får benyttelsen af variable en naturlig plads.
Går man videre fra multiplikationen 6 · 17 til at betragte multiplikationen 6 · 0,7 kan eleverne igen bygge på den grundlæggende forståelse af multiplikation som gentagen addition eller på en geometrisk repræsentation:

Men eleverne kan ikke bygge på tidligere erfaringer om, at “når man ganger, får man et større tal som resultat”. For mange elever vil det i første omgang være usandsynligt, at 6 gange noget kan blive mindre end 6. Dette er en fare ved at opbygge talarbejdet på generaliseringer, der kun gælder inden for et bestemt talområde. Det svarer til, at eleverne generaliserer og siger, at “man ganger et tal med 10 ved at sætte et nul efter tallet”. Ved $10 \cdot 17$ går det jo godt, mens det ved $10 \cdot 0{,}7$ går galt.
Er man i tvivl om, hvilke regler der gælder for en bestemt udregning, bør eleverne fra undervisningen have vænnet sig til at prøve at se nærmere på problemstillingen, så man ikke blot siger: “Jeg kan ikke huske hvordan, jeg skal gøre.” Eleverne skal opnå tillid til, at de altid kan bygge videre på deres egen grundlæggende forståelse. Det er lærerens opgave at støtte eleven i det arbejde.
At tage udgangspunkt i elevernes egne strategier og at støtte og udfordre dem, så de med forståelse udvikler en passende metode, er en udfordring for læreren. Han skal kunne tænke i udviklingstrin for den enkelte elev samtidig med at slutmålet, “ hensigtsmæssige beregningsmetoder”, er tænkt med ind. Da det jo er talforståelse, der er det centrale i udvikling af metoder, vil forskellige trinmål inden for tal og algebra og inden for kompetencer og arbejdsmåder være inde i billedet samtidigt.

Arbejde med algebra, formler og ligninger

Flaskeaflevering, algebra på mellemtrinnet

Dette eksempel tager udgangspunkt i, at de fleste børn på mellemtrinnet har erfaring med at få udbetalt pant, når de afleverer flasker i en flaskeautomat. Eleverne kan blive præsenteret for et fotografi af en flaskeautomat med en oversigt over de forskellige typer pant, fx:

Lille flaske: 1,00 kr.

Mellemstor flaske: 1,50 kr.

Stor flaske: 3,00 kr.

Der kan formuleres en række opgaver til elever på mellemtrinnet med udgangspunkt i flaskeafleveringen.

- Hvor mange penge gives fx for 3 store flasker? For 4? For 10? For 100?

Hvis opgaverne skal medføre algebraisk tænkning, kræver det, at de sigter på at generalisere. Over for elever på mellemtrinnet kan det være en idé at få dem til at forklare en generel fremgangsmåde for en kammerat:

- Hvordan vil du forklare en kammerat, hvor mange penge man får for en posefuld af de store flasker?
- Kan du skrive en fremgangsmåde, din kammerat kan bruge?
- På “matematiksprog” bruges der ofte et bogstav for et ukendt antal. Hvor mange penge tjener man på “et eller andet” antal flasker? På *a* flasker?

Opgaverne kan også (senere) komme til at medføre sammenligning af regneudtryk.

- Hvilke af regneudtrykkene herunder fortæller fx, hvor mange penge du får for 4 store flasker og 4 små flasker? Hvorfor?

  $3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$
  $4 \cdot 3 + 4 \cdot 1$

4 · (3 + 1)
12 + 4

Hvordan ville du selv beregne, hvor mange penge du får for 4 store flasker og 4 små flasker?
På de større klassetrin kan opgaverne komme til at omfatte algebraiske udtryk.
Hvilke af regneudtrykkene herunder fortæller fx, hvor mange penge du tjener på a store flasker og a små flasker? Hvorfor?

- a · 3 + a · 1
- a · (3 + 1)
- 4a
- 4a

Der kan også stilles opgaver, som vedrører ligningsløsning. Fx: "Min kammerat afleverede 15 store og mellemstore flasker i automaten. Han fik 36 kr. for dem, men han kan ikke huske, hvor mange der var af hver slags. Kan du hjælpe?"
Eleverne kan selv formulere flere opgaver til deres klassekammerater med forskellige sværhedsgrader ud fra idéen med flaskeaflevering.
Eleverne får mulighed for at arbejde med forskellige sider af algebraen i udfoldningen af opgaver omkring en flaskeautomat, og de får mulighed for at benytte "kendt sprog" i overgangen til "matematikkens sprog"

Trekantens areal, algebra i 6. klasse

I en sjetteklasse er eleverne i gang med at undersøge metoder til beregning af arealet i en trekant. I grupper formulerer de i fællesskab regler for de erfaringer og den indsigt, de har opnået gennem arbejdet. Eleverne er nået frem til formuleringer som disse:
Gruppe I:
"Man kan gøre trekanten til et rektangel og måle dets areal og halvere det."
Gruppe II:
"Ved at tegne rektangel rundt om trekanten og finde halvdelen af rektanglet."
Gruppe III:
"Længden gange bredden og : med to. Det går ikke med en skæv trekant, men hvis man deler trekanten over på midten, sådan at det bliver to rette vinkler, så kan man."

Klassen kan herefter i fællesskab drøfte formuleringerne og derigennem skærpe opmærksomheden på, hvordan man udtrykker sig. Klassen kan i fællesskab undersøge, om grupperne formuleringer er holdbare for alle trekanter eller kun bestemte typer trekanter – og hvorfor?
Man kan tale om, hvordan en formel som T = h · g : 2 kan læses, og at den angiver en algebraisk beskrivelse af, hvordan man finder arealet *T* af en trekant med højde *h* og grundlinje *g*. Senere kan man gøre sig overvejelser over, hvorfor det er særlig vigtigt at beskæftige sig med arealet af trekanter.

Formler og ligninger i overbygningen

Et eksempel på, hvordan eleverne kan arbejde med at skabe sig personlig viden i arbejdet med formler og ligninger kunne være følgende, hentet fra en 8. klasse:
Eleverne har i de foregående år arbejdet med anvendelse af variable i mange sammenhænge, hvor der har været vekslet mellem beskrivelser i ord og ved hjælp af symboler, fx sammensat til ligninger.

Erfaringer viser, at der er et stort spring at foretage for eleverne, når de skal til at håndtere algebraiske udtryk i form af ligninger. Det generer eleverne, at de oplever, at der ikke er en bestemt metode, der altid er den mest hensigtsmæssige at benytte.
Efter en generel indledende samtale om ligninger blev der taget hul på det mere tekniske arbejde med løsning af ligninger. Eleverne gik uden nærmere angivelser af metoder i gang med selvstændigt at løse ligninger af forskellige typer, som antydet i dette uddrag:
I løbet af en lektion løste eleverne mellem 10 og 26 opgaver.
Metoderne, der blev anvendt var vidt forskellige. Men typisk blev ligningerne løst "baglæns".
Fx opgave 5:

Hvis $(5x - 2)$ skal være 8, $5x - 2 = 8$
så skal 5x være 10.
Det kunne skrives sådan: $5x = 10$
Hvis man så i øvrigt var klar over,
at 5x var det samme som $5 \cdot x$,
så var det let at se,
at løsningen var: $x = 2$
I nogle opgaver skulle der reduceres først. Men så kunne også de løses ved overvejelser og tilbagegående regning.
Selv opgaver af denne type kunne klares:
$17y + 8 - 2y = 30 + 4y$
Først blev der reduceret: $15y + 8 = 30 + 4y$
Herefter blev der ræsonneret til, fx at
15y og 4y på hver sin side af " = "
måtte kunne reduceres til: $11y + 8 = 30$
Hvorefter typen ligner de foregående.
Ved at bygge på forhåndskendskabet til variabelbegreb og regneregler kom eleverne langt i det tekniske arbejde med løsning af ligninger.
Da de ikke havde fået præsenteret en bestemt metode, var de nødsaget til at se på den samlede symbolsammenstilling, benytte ræsonnementer, fejle og prøve igen. Dette skal ses i modsætning til et forløb, hvor nogle ligningsløsningsregler bliver præsenteret – "lægge lige meget til på begge sider af lighedstegnet", "flytte over på den anden side af lighedstegnet" mv.
Ved den benyttede fremgangsmåde er eleverne selv med til at finde frem til metoder og regler. De er med til at opbygge deres matematiske kunnen og viden, og de får en grundlæggende metode at vende tilbage til.
Nogle elever kan med fordel fortsætte med at benytte inspektionsmetoden, hvor de "gætter" på et tal, som indsættes for den variable:
Herefter regnes udtrykket ud for at se, om tallet er en løsning. Er tallet ikke en løsning, fortsættes med nye "gæt" og efterprøvninger, indtil et
resultat er nået.
På et senere tidspunkt må elever og lærer drøfte betydningen af at kunne løse ligninger efter de sædvanligt anvendte metoder. Der må tages stilling til, hvilke færdigheder i ligningsløsning de forskellige elever har behov for at tilegne sig.

Herunder må også grafiske metoder i koordinatsystemet inddrages. Fx kan løsning af ligningssystemet bestemmes ved at tegne grafiske billeder og aflæse skæringspunkters koordinater. Eksperimenterende arbejde i et computerprogram til tegning af grafer kan også give indsigt i ligningsbegrebet.

Tal som en del af kulturen

Når der i fagets formål står, at undervisningen skal medvirke til, at eleverne oplever og erkender matematikkens rolle set i en kulturel og samfundsmæssig sammenhæng, skal dette opfattes bredere end et "teknisk" anliggende.

Som et kendt og meget brugt eksempel på et tema, som har et matematikfagligt udgangspunkt, men som hurtigt fører til iagttagelser af både kunstnerisk og naturfaglig karakter, kan Fibonacci-talrækken nævnes. Talrækken: 1, 1, 2, 3, 5, 8, … vækker for mange elever umiddelbart nysgerrighed.

Er det næste tal i rækken mon 13?

Hvis ja, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

Hvilken regel vil få det ottende tal i rækken til at være 21?

Eleverne kan selv fortsætte legen: Hvad sker der, hvis de to første tal i rækken hedder 0, 1,...? Undersøgelse af forholdet mellem to på hinanden følgende tal, fx 3 : 5, og sammenligning med 5 : 8 og andre efterfølgende forhold, kan give anledning til nye overvejelser.

Et andet aspekt – modellering – kan inddrages specielt i forbindelse med Fibonaccitallene. Det har vist sig, at "frøene" i solsikker, kogler, ananasfrugter m.fl. sidder i spiraler, der snor sig enten til venstre eller til højre, og at antallet af sådanne spiraler tilsyneladende altid "rammer" et tal i Fibonaccirækken.

Det er naturligvis ikke teknikken i at udregne Fibonaccirækkens tal, der er det væsentlige, eller at antallet af frøspiraler er et Fibonaccital. Det væsentlige er, at eleverne får mulighed for at opleve, hvorledes der kan arbejdes med matematik.

I dette tilfælde fører den "rene" matematik til en model, der svarer til forhold i omgivelserne. I andre tilfælde dyrkes legen med matematikken alene for dens egen skyld.

Geometri

Når et barn i skolestarten prøver at tegne et hus, er det barnets forestillinger om hus, der bliver synlige på papiret. Selv om hånden er usikker, og stregerne bugter sig, er det tydeligt, at eleven forsøger at beskrive en form. Til at begynde med er det blot en firkant med døre og vinduer, som også er firkanter. Senere prøver eleven at tegne to sider af huset på tegningen – forside og gavl. Forside og gavl er tegnet som én flade. Det bekymrer ikke barnet. Døre og vinduer søges omhyggeligt tegnet ind og derefter følger ofte en kamp med en skorsten. Form, størrelse og beliggenhed spiller ved tegningen en rolle for barnet. Og som følge af barnets mere og mere opmærksomme observationer og dets voksende evne til at gøre sig forestillinger, gennemgår børnetegningen en udvikling. Læreren skal i undervisningen udvikle elevernes begreber som form, størrelse, lighed, beliggenhed, ved siden af, ovenover, foran og imellem. I matematik kan arbejdet med geometriske begreber og tænkning forbindes såvel til forsøg på at gengive virkeligheden ved tegning som til at arbejde med brikker, computerprogrammer, sømbræt eller at bygge tredimensionelle modeller.

Den indledende geometriundervisning

Det er et grundlæggende træk ved læseplanen, at geometrien tager udgangspunkt i elevens forestillinger om og beskrivelse af den omgivende verden. Herved kan arbejdet med geometrien – på samme måde som arbejdet med tallene – tage udgangspunkt i børnenes hverdagserfaringer.

Indholdet i geometriundervisningen er beskrevet som et samspil mellem beskæftigelsen med konkrete dagligdags ting, arbejdet med den geometriske beskrivelse heraf i form af tegninger, overvejelser om sammenhængen mellem tingen og den tegnede gengivelse heraf samt en begyndende udvikling af geometriens begreber.
I de første år arbejdes der med fysiske objekter, som gøres til genstand for manipulation, iagttagelse og drøftelse. Erfaringerne med de geometriske former og figurers størrelse kan med fordel underbygges ved at lade eleverne bygge rumlige modeller og lave figurer på et sømbræt eller i et dynamisk geometriprogram på computeren. Det kan være figurer, der ligner et eller andet, eller det kan være figurer, som skal opfylde bestemte betingelser: Kan du lave en firkant, som er dobbelt så stor som denne her? Herved kan eleverne opdage, at "dobbelt så stor" kan have flere betydninger: Dobbelt så lange sider eller dobbelt så stor en flade. Det er lærerens opgave at give eleverne mulighed for at opdage og indse sådanne forskelle. Herved kan eleverne indse behovet for at udtrykke sig mere præcist.
Eksempler på aktiviteter i 1. forløb kan være:

- Tegn den rute, du går til skole.
- Byg en model af dit værelse.
- Tegn det hus, du bor i.
- Find mønstre i dine omgivelser og tegn et af dem.

I dialogen kan indgå spørgsmål som:

- Hvad fortæller din tegning?
- Kan du se på tegningen, hvor langt du har til skole?
- Hvordan kan du finde ud af, hvor langt der er i virkeligheden?
- Vinduet i dit værelse er firkantet. Er der andre firkantede ting på værelset?
- Hvilke andre former har tingene på dit værelse?
- Kan du gøre din tegning dobbelt så stor?
- Hvorfor er dit mønster symmetrisk?

Eleverne arbejder med ordning af ting efter form, størrelse og andre egenskaber, og gennem arbejdet med rumlige figurer får de mulighed for at videreudvikle deres rumlige fornemmelse.
Indledende aktiviteter med måling af afstand, flade, rum og vægt med ikke-standardiserede og standardiserede enheder er vigtige aktiviteter i den indledende geometriundervisning. Disse aktiviteter er det konkrete udgangspunkt for et senere arbejde med måling og beregning af længder, areal og rumfang.

Arbejde med geometriske modeller

Tegning er en central del af geometrien og indgår i arbejdet med geometriske modeller i hele skoleforløbet. Elevens første forsøg på at beskrive sine iagttagelser gennem tegning kan ikke i matematisk forstand kaldes geometri, men arbejdet rummer beskæftigelse med centrale begreber som form, størrelse, beliggenhed, sammenligning osv. Arbejdet med forskellige former for tegnede udtryk skal gå hånd i hånd med udvikling af de geometriske begreber, så der skabes et grundlag for en mere teoretisk opbygning af geometrien.
Arbejdet med tegning som en geometrisk model, der gengiver træk fra "den virkelige verden" i geometriundervisningen, giver læreren mulighed til følgende overvejelser.

Valg af udgangspunkt

Udvælgelse af et udgangspunkt i indskolingen vil ofte være fra elevernes egen erfaringsverden eller nære omgivelser. Senere i skoleforløbet kan undervisningen tage et konkret udgangspunkt længere væk fra elevernes nære verden, fx kan man ofte hente inspiration fra kunst, design og arkitektur. I forsøget på at lave et mønster til tekstil- eller billedkunst, i forsøget på at se og gengive mønstre i orientalsk udsmykning og i forsøget på at lave en teknisk tegning vil eleverne kunne se et mål for arbejdet, som vil kræve matematisk aktivitet i form af at benytte bestemte regler og fremgangsmåder.

Frembringelsen af det tegnede udtryk

Gennem arbejdet med at gengive træk fra virkeligheden ved tegning skal der bruges forskellige teknikker og tegneformer og hensigten er, at eleverne lærer at anvende dem. For at det kan ske, må eleven gøres opmærksom på eller selv opdage de særlige regler, som er knyttet til teknikken eller tegneformen.

Grundlæggende elementer fra geometrien vil i arbejdet med tegning kunne blive lige så synlige som i andre former for geometriundervisning: Linjer, som begrænser plane figurer, deres indbyrdes beliggenhed, parallelitet, skæring under dannelse af vinkler, figurer med typiske træk (firkant, trekant), længde, flade og rummål. Her vil anvendelsen af et dynamisk geometriprogram udvide elevernes muligheder. Fx kan midtnormalerne og vinkelhalveringslinjerne i en trekant og deres egenskaber undersøges nærmere på en relativ let,men samtidig dybdegående måde.

I de nye Fælles Mål er der ikke et selvstændigt trinmål omkring arbejdstegning, isometrisk tegning og perspektivtegning. Det betyder ikke, at disse tegneformer ikke kan indgå i arbejdet med at gengive træk fra virkeligheden ved tegning.

Vurdering af den geometriske model

De forskellige teknikker og tegneformer vil ofte "respektere" forskellige egenskaber ved den tegnede genstand. Hvilke egenskaber ved genstanden i den fysiske verden kan man genfinde på den tegnede model af den? Hvilke informationer er forsvundet? I de større klasser kan eleverne dermed komme til at undersøge og vurdere sammenhænge mellem modellen (tegningen) og virkelighedens objekt. Ingen tegnemodeller rummer alle de informationer, man kan finde, hvis man undersøger den virkelige verden.

I arbejdet med at fremstille tegninger efter givne forudsætninger fx geometriske konstruktioner er der mulighed for at inddrage ræsonnementskompetencen.

Undersøgende arbejdsmåder i geometri

Geometrien rummer mange muligheder for undersøgelser og eksperimenter. Undersøgelserne vil typisk rumme mulighed for problemløsning, fx:

- Hvor mange forskellige trekanter kan du lave på et 3 x 3 sømbræt? Hvor mange firkanter?
- Hvor mange forskellige figurer kan du bygge med 3, 4 eller 5 centicubes?
- Kan du bygge en figur, der vejer dobbelt så meget som…? Kan figuren være en kasse?

og mulighed for kommunikation, fx:

- Forklar, hvorfor du mener, disse to trekanter er ens.
- Forklar, hvorfor denne figur er et rektangel.

Undersøgelserne vil ofte være ledsaget af spørgsmål som fx:

- Hvordan går det, hvis…?
- Mon det går sådan, fordi…?

Arbejdet med areal og rumfang udgør et stort område af undervisningen, og det er velegnet til undersøgende arbejde. Det starter allerede på begyndertrinnet med undersøgelser, hvor eleverne ved dækning med brikker eller lignende søger at finde fladestørrelse. Ved måling med fx vand eller sand kan man finde rumfanget af forskellige figurer fra elevernes hverdag.
Opmærksomheden rettes især mod overgangen fra måling med ikke-standardiserede og standardiserede enheder til beregning af forskellige typiske størrelser ved de forskellige figurer. Eleverne skal med lærerens støtte arbejde med at udvikle metoder til beregning af omkreds, areal og rumfang af forskellige figurer. Og ligeledes med lærerens støtte skal det lede frem mod en større forståelse af geometriske begreber og generalisering af metoder til beregning. Altså hen mod, at eleven fx indser, at længden af radius i en cirkel er den eneste information, man behøver for at bestemme cirklens areal.

Udvikling af metoder til beregning af areal

Området er præget af formler. Der er mange, og de kan slås op, men det er afgørende for elevernes forståelse af, hvad formler betyder, at de kommer igennem nogle fundamentale erkendelsesprocesser.
Det begynder hos de yngste elever:

- ved at lægge to helt ens trekanter ved siden af hinanden kan man altid få en firkant,
- ved at lægge kvadratiske brikker på en rektangulær flade, som kan dækkes helt af brikkerne, kan man finde et tal, der beskriver størrelsen af fladen.

Det skal prøves mange gange og mødes i mange sammenhænge.
Eleverne opdager, at rektangler er figurer, der direkte kan måles (med kvadrat som måleenhed), og at antallet af arealenheder kan bestemmes ved multiplikation. De fleste andre figurers størrelsesbeskrivelse kan kun forstås ved ræsonnementer.

I dette tilfælde kan eleven se, at den venstre figur er 2 stor, fordi den består af to arealenheder. Trekantens størrelse på den anden figur kan gennem ræsonnement indses at være 1. Enten fordi den er halvdelen af 2, eller fordi trekanten deles op, og delene flyttes rundt, så der dannes et kvadrat, som er 1. Nogle elever kan meget tidligt foretage denne tænkning og sætte sprog på.

På tegningen herover er vist en række figurer på sømbræt.
De er samlet til denne lejlighed – ikke til en samlet undervisningssituation. Men figurerne viser netop elevernes mulighed for at udvikle metoder til størrelsesbeskrivelse af plane figurer:

- Retvinklede trekanter er altid halvdelen af et rektangel
- Parallelogrammer kan altid omdannes til rektangler med samme areal
- Ikke retvinklede trekanter er halvdelen af et parallelogram.

I løbet af 4.-6. klasse kan den enkelte elev udvikle metoder, der bygger på erkendelse og indsigt, så eleven på et senere tidspunkt, hvor det lærte er glemt, vil kunne gendanne den viden, som engang blev erhvervet. I processen med denne størrelsesbeskrivelse er det afgørende, at eleverne selv udvikler et sprog, som fortæller om deres egne konklusioner. Ved at sætte elevernes forskellige sproglige udtryk op mod hinanden, gives der mulighed for at drøfte mere præcise formuleringer, som udelukker misforståelser.

For ældre elever, hvor konkretiseringen ofte tones lidt ned, er der fortsat et behov for at skabe indlevelse i de grundlæggende begreber. Det er vanskeligt at forestille sig, at eleverne kan udvikle et størrelsesbegreb knyttet til rumlige figurer uden at have været igennem fysiske målinger, som kan danne grundlag for beregninger – helt på samme måde som ved arbejdet med arealbegrebet

Arbejde med geometri med udgangspunkt i konkrete problemer

For såvel den syvårige som den syttenårige kan der formuleres problemstillinger, som tager udgangspunkt i konkrete objekter eller billeder af konkrete objekter. Det kan være objekter fra elevernes hverdag eller objekter, som de selv bygger. Det kan være særlige materialer fremstillet med en pædagogisk hensigt: – brikker, klodser og stænger. Det kan være særlige undervisningsmiljøer, hvor eleverne i en afgrænset verden kan gennemføre undersøgelser med et endeligt antal løsninger – fx sømbræt eller centicubes. Eller det kan være objekter, som tegnes og ændres ved hjælp at et dynamisk geometriprogram.

Det er vigtigt, at konkretiseringen er et middel og ikke et mål. Gennem arbejdet med det konkrete objekt skal eleven prøve at nå en eller anden form for erkendelse og indsigt. Det er muligt, at eleven fx vil opfatte det at fremstille en terning af kvadratiske brikker som selve opgaven, men det er lærerens opgave at være med til at udvikle problemet, så der opnås en indsigt, fx gennem spørgsmålet: Kan I fremstille en anden rumlig figur med seks flader, der ikke behøver at være kvadratiske?

Dette arbejde vil hos yngre elever foregå intuitivt, men hvis læreren gør det til hensigten for arbejdet, kan de ikke undgå at foretage overvejelser over hvilke forudsætninger, der skal være til stede, for at deres undersøgelser kan føre til et resultat. "Skal det altid være firkanter?" "Skal der være parvis lige store sider?" "Kan man lave et sekssidet legeme, som kun består af trekanter?", osv.

For ældre elever vil opgaveformuleringen kunne tvinge eleverne ud i overvejelser af mere teoretisk karakter. Som eksempel på sådanne overvejelser gives her en beskrivelse af et sådant undervisningsforløb:

En gruppe elever i 8. klasse skal prøve at fremstille en rumlig figur, som kun består af regulære femkanter. De skal selv finde ud af, hvordan man fremstiller en regulær femkant.

Her er en undervisningssituation, hvor eleverne må støtte sig til deres erfaring og til intuition.

Forløbet kan fx være dette:

- En af eleverne tegner en femkant – tilfældigt – klipper den ud med limkanter.
- Flere femkanter bliver klippet ud – samleprocessen kan begynde.

Ingen i gruppen har opfattet opgaven som vanskelig. Det er jo let, de har prøvet noget lignende så mange gange, men: – siderne passer ikke sammen!

Eleverne er så erfarne, at de umiddelbart kan se, at de har tænkt for lidt. De må nu selv formulere de egenskaber, som læreren ellers ville have lært dem i en sætning: I en regulær femkant er alle sider lige lange og alle vinkler lige store. Deres første konklusion er lige lange sider, hvis opgaven skal kunne løses.

Nu bliver det vanskeligt at tegne en femkant med denne egenskab. Den første side tegnes let, men i hvilken retning skal den næste side tegnes? Vi kender ingen vinkler!

Eleverne har tidligere arbejdet med vinkelsummen i en trekant. Læreren behøver nu blot at give et lille skub: Prøv at dele femkanten op i trekanter. Lærerens modspil til elevernes forsøg på at løse problemet støtter deres læreproces. Det er det centrale i undervisningen.

Tal og geometri

Overskriften sigter især på de mange tilfælde, hvor geometri kan være en støtte for andre matematiske discipliner. Alle lærere har erfaret, at man ofte kan tegne sig igennem et problem, som en elev ikke forstår, fx: "En halv er det samme som to fjerdedele".

Matematiske regler som den pythagoræiske læresætning kan vises ved geometrisk betragtning. Også ved løsning af praktiske problemer kan geometrien med fordel benyttes. Skal man fx finde ud af, hvor mange hylder af en bestemt størrelse, der kan fås ud af en plade, kan en tegning give løsningen.
Der er elever, som har lettere ved at forstå, hvad det handler om, når de får problemet præsenteret gennem en tegning. Derfor skal denne repræsentationsform også være en mulighed for alle elever. Det kan endda tænkes, at det for nogle elever vil være tegningen, som resten af elevens liv er erindringen, der giver matematisk kompetence på det abstrakte plan.
Idéen med at arbejde med tegnede regneudtryk kan udvikles langt. Eleverne på de ældste klassetrin vil kunne arbejde med opgaver som den følgende, hvis der bruges konkrete tal – for de dygtigste kan det blive til en algebraisk udfordring.
I skal "oversætte" de tre diagrammer til algebraiske udtryk.

- Vis, hvad de tre diagrammer udtrykker, hvis de forskellige længder kaldes

  a b
  ----------------------- ---------------
- Vis, hvad de tre diagrammer udtrykker, hvis de forskellige længder kaldes

  a b
  ----------------------------- -----------------------
- Vis, hvad de tre diagrammer udtrykker, hvis de forskellige længder kaldes

  a b
  ---------------------------- ---------------

Trigonometri
I de nye Fælles Mål er undersøgende arbejde med enkel trigonometri i forbindelse med retvinklede trekanter blevet et trinmål i 9. klasse. Emnet kræver, at eleverne har arbejdet med fx ligedannethed, målestoksforhold, retvinklede trekanter og Pythagoras' sætning. Udgangspunktet vil være praktiske problemer, hvor eleverne får mulighed for at arbejde med afstande, der ikke kan måles på en simpel måde med et målebånd.
Eleverne i 8. klasse arbejder med at finde højden på skolens flagstang eller et træ i skoven på forskellige måder: Med redskaber som teodolit eller klinometer kan vinklen mellem stangens top og fod måles i en bestemt afstand fra flagstangen. Redskaberne kan med fordel fremstilles af eleverne. Når eleverne har målt en vinkel og afstanden hen til objektet, kan de tegne situationen på papir eller i et dynamisk geometriprogram i et passende målestoksforhold og måle højden af flagstangen. Med middelalderens jacobstav eller den simple pind kan en beregning ud fra viden om ligedannede trekanter føre frem til en beregning af højden. Udgangspunktet for at arbejde med trigonometri er altså en række praktiske eksempler, som drejer sig om retvinklede trekanter, og at der endvidere i klassen tidligere er arbejdet med ligedannethed og tegning i målestoksforhold. At introducere trigonometri forenkler disse beregninger og giver en større indsigt i sammenhængen mellem sider og vinkler i retvinklede trekanter.

Arbejdet med trigonometri kan også rumme en undersøgelse af enhedscirklen eller den retvinklede enhedstrekant. Til dette undersøgende arbejde vil et dynamisk geometriprogram være en oplagt hjælp. Gennem en sammenligning af enhedstrekanten med andre trekanter fra ovenstående praktiske situationer kan eleverne opleve, at trigonometrien kan give adgang til lette beregninger af sider og vinkler. Begreberne sinus, cosinus og tangens kan introduceres og anvendes til beregninger vha. computer og/eller lommeregner. Der arbejdes ikke med tabeller. I hovedafsnittet med undervisningseksempler gives konkrete forslag til arbejdet med trigonometri.

Dynamiske geometriprogrammer

I dag findes en række dynamiske geometriprogrammer, som gratis kan hentes på internettet. En stor del af det traditionelle arbejde med at konstruere fx trekanter med givne egenskaber vil naturligt foregå på computeren. Ligesom lommeregner og computer har fjernet behovet for træning af standardalgoritmer i forbindelse med arbejdet med tal og algebra, ændrer anvendelsen af dynamiske geometriprogrammer i forbindelse med arbejdet med geometri også behovet for at udvikle tegnemetoder til geometriske konstruktioner på papir. Og samtidig åbnes der for mange nye muligheder for at udvide elevernes arbejde med geometrisk konstruktion, undersøgelser med henblik på forståelse af geometriske regler og ræsonnementer.

Arbejdet med dynamiske geometriprogrammer kræver derimod ofte, at en række geometriske begreber er kendte.Med disse begreber på plads kan eleven relativt nemt konstruere en trekants omskrevne cirkel ved at tegne en trekant, herefter tegne midtnormaler og endelig tegne cirklen med centrum i midtnormalernes skæringspunkt og med den givne radius. Herefter kan eleven ved at trække i punkter og linjestykker undersøge, hvad der sker med midtnormalerne og den omskrevne cirkel, når trekanten ændrer form.

Det interessante er ikke, at computeren kan tegne. Det interessante er derimod, at eleverne får øgede muligheder for at arbejde med tegning, undersøgelser, analyser og ræsonnementer i tæt sammenhæng.

Også i forbindelse med arbejdet med geometriske mønstre rummer computeren store muligheder på alle klassetrin. I forbindelse med et sådant arbejde er det oplagt at gennemføre ræsonnementer omkring linjer ved trekanter, cirkler, vinkler, flytninger, symmetri osv.

Computeren rummer også særlige muligheder for at arbejde i et tilsyneladende 3-dimensionalt rum, og det kunne fx være oplagt at lade eleverne stifte bekendtskab med et program af den slags. I et sådant program kan man opgive mål for rumlige figurer og meget hurtigt sammensætte disse figurer og betragte dem fra forskellige vinkler som en perspektivtegning.

Statistik og sandsynlighed

Statistik og sandsynlighed er i de nye Fælles Mål flyttet fra CKF'et *Matematik i anvendelse* til et selvstændigt område under CKF'et *Matematiske emner*.

I de mindre klasser starter arbejdet med statistik omkring indsamling af data, der vedrører eleverne selv, fx alder, højde, skostørrelser, antal søskende, antal kæledyr og fritidsinteresser, og deres nærmeste omgivelser som skolevejens længde, boligtype mv.

I en 2. klasse interesserer eleverne sig fx for trafikken på skolevejen. Der tælles biler og andre trafikanter på forskellige tidspunkter. Datamaterialet optælles og bearbejdes i tabeller og diagrammer, gerne med hjælp af en computer. I hverdagssprog formulerer eleverne, hvad man kan se af de bearbejdede data.

- Hvilke typer trafikanter er der flest af?
- Hvornår er der flest trafikanter på gaden?
- Er der forskel på, hvornår der er flest biler, og hvornår der er flest fodgængere?
- Hvorfor er det sådan?

Eleverne kan også bruge indsamlede data over en længere periode til at beskrive en udvikling, fx ved at de måler deres egen højde to gange årligt gennem flere år, ikke mindst de år, hvor de vokser ekstraordinært meget. Lignende dataindsamling kan indgå i tværfaglige forløb, fx egne idrætspræstationer over tid.

Eleverne skal også arbejde med at læse andres statistiske fremstillinger. I 6. klasse er eleverne fx blevet optaget af et diagram fra en avis, der beskriver 12-åriges medieforbrug. Selve forståelsen af diagrammet sammenlignet med avisartiklens beskrivelse af samme har medført diskussioner i klassen. Eleverne beslutter at gennemføre en undersøgelse af medieforbruget i alle skolens 6. klasser. De udarbejder et spørgeskema, som også medtager forhold, der ikke var med i avisens undersøgelse. De indsamlede data bearbejdes i et regneark. Fremlægning indebærer en sammenligning med avisens udlægning og sammenligninger mellem piger og drenge, klasserne indbyrdes osv.

I forbindelse med projektopgaven i 9. klasse gennemfører eleverne ofte spørgeskemaundersøgelser. Det er derfor oplagt i matematikundervisningen at give eleverne mulighed for at arbejde med udarbejdelsen af spørgsmål, vurdering af deres kvalitet og validitet, optællingsmetoder og bearbejdning i et regneark eller et statistikprogram.

Udgangspunktet for at vurdere andre statistiske overvejelser vil ofte være avisernes og andre mediers anvendelse af statistik i form af skemaer og diagrammer.

Ved at indsamle data fra forskellige spil kan der dannes grundlag for overvejelser om chancer.

Et eksempel på en populær sportsgren i 2. klasse er dyreløb på baner nummereret 2–12. Hver bane skal "gennemløbes" af et dyr. På bane 2 løber fx geparden, på bane 5 koen, på bane 7 sneglen og på bane 11 elefanten osv. Eleverne spiller vinderspil med skolepenge. På skift slår eleverne med to terninger, og summen af øjnene bestemmer, i hvilken bane der rykker et felt frem. Der kan spilles flere gange, dyrene kan skifte bane, dyrene kan skiftes ud med transportmidler af forskellig art. Legen følges op med en dialog om, hvorfor det ser ud til, at banerne 6, 7, eller 8 næsten altid vinder.

- Gad vide, hvilke terningekast der kan give 5, 12, 2?
- Hvad nu, hvis terningerne er to forskellige farver… ændrer det chancerne?
- Hvad nu, hvis I prøver igen, bliver det de samme dyr, der vinder?
- Hvordan går det, hvis I laver rigtig mange kast?
- Hvad nu, hvis det er differensen, der bestemmer banenummeret?

Forløbet kan på mellemtrinnet følges op med en egentlig undersøgelse af kast med to terninger med en efterfølgende statistisk bearbejdning.

- Hvis alle i klassen har slået 50 gange, hvilken sum er så hyppigst?
- Hvordan forholder det sig, hvis alle har slået 200 gange?
- Hvordan ser det ud, når vi har ladet computeren gennemføre millioner af "slag"?

Eleverne begynder at forbinde tal mellem 0 og 1 med chancerne for at vinde i dyreløbet fra 2. klasse. På mellemtrinet forsætter undersøgelserne af forskellige former for spil.

Spil er i det hele taget et godt udgangspunkt for en dialog om chancer på baggrund af elevernes intuitive chancebegreb kombineret med deres indhøstede erfaringer gennem spillene.

I overbygningen kan dyreløbet følges op med at opbygge en simpel matematisk model over spilchancerne vha. af enkle kombinatoriske beregninger ud fra en formodning om, at terningernes udfald opfattes som ligevægtede. Eleverne analyserer og udregner sandsynligheder for forskellige chancer for at vinde i dyreløbet.
At opnå erfaring med tilfældighed og chance i eksperimenter og spil er trinmål efter 3. klasse. Her er mange muligheder for aktiviteter, og læreren må tænke på, at arbejdet med tilfældighed og chance er grundlaget for en udvikling frem mod det statistiske og det kombinatoriske sandsynlighedsbegreb som begge er mål efter 9. klasse.
I undervisningen i de større klasser indgår behandlingen af fænomener, der vedrører tilfældighed, chance eller risiko og usikkerhed. Det kan fx dreje sig om

- stikprøveundersøgelser
- lodtrækning
- forsikring
- vejrdata
- chancespil
- ekspertvurderinger
- odds.

I arbejdet med sandsynlighed sigtes der på, at eleverne opnår indsigt i de forskellige måder, sandsynligheder beregnes på:

- Som personlige vurderinger, ofte eksperter. Dette er bl.a. grundlaget for beregninger af odds i Danske Spil.
- Som en frekvensanalyse af indsamlede data (statistisk sandsynlighed). Dette anvendes bl.a. i nogle risikovurderinger.
- Som udfald, der opfattes som ligevægtede. Dette anvendes fx i forbindelse med terningespil.

I en undervisning, hvor de stoffaglige mål er fra statistik og sandsynlighed, er der tillige en mulighed for at arbejde med problembehandling og ræsonnement, samtidig med at det undersøgende arbejde er i centrum.

Matematik i anvendelse

Beskrivelse ved hjælp af matematik

Det har altid været en begrundelse for undervisningen i faget matematik, at den praktiske anvendelse har haft en fremtrædende plads. Tekstopgaver, hvor der blev benyttet et særligt regnesprog, var førhen den typiske form, hvorunder anvendelsen blev præsenteret.
I dag taler vi om matematik i anvendelse, når et problem – større eller mindre og ofte af en vis åben karakter – behandles ved at inddrage begreber og metoder fra matematikken, oftest ved en matematisk modellering. I denne behandling kan indgå et samarbejde mellem flere fag for at få problemstillingen belyst bedst muligt. I den første del af skoleforløbet vil det fx i mange tilfælde være naturligt, at natur/teknik og matematik indgår i flerfaglige forløb.
Forhold, der vedrører menneskeliv, natur og samfund, beskrives ofte ved hjælp af matematik. Det sker, hvad enten det er en kvantitativ beskrivelse, eller det handler om at beskrive forhold ved hjælp af tegning.
Den matematiske beskrivelse kan have forskellig karakter. Der kan være tale om, at faktiske forhold bliver fuldt ud beskrevet, at faktiske forhold bliver beskrevet ved hjælp af stikprøver, eller at en udvikling over en periode bliver beskrevet, og fremtidige forhold bliver forudsagt.
I flere af disse beskrivelsesformer indgår der overvejelser om sandsynlighed, baseret på statistik. Statistisk sandsynlighed har en stigende anvendelse i den matematiske beskrivelse.

I undervisningen kan behandlingen af selv store datamængder blive overkommelig med de muligheder it giver. Vægten kan derfor lægges på spørgsmål om at fremskaffe data, herunder elevernes egen indsamling af data i nogle situationer, samt at overveje anvendeligheden af bestemte data. På samme måde er det vigtigt, at man i undervisningen tillægger det stor vægt at arbejde med en kritisk forholden sig til de opnåede resultater. Herved kan eleverne opbygge et beredskab, som er brugbart i andre lignende situationer.
For de ældste elever vil der i mange sammenhænge være centrale samfundsspørgsmål at beskæftige sig med. I både den trykte og den elektroniske nyhedsformidling inddrages til stadighed argumentation, som benytter matematikkens sprog: tabeller, kurver, beregninger og tegninger. Det gøres ofte, uden at denne side af argumentationen problematiseres. Ikke sjældent benyttes matematikken som sandhedsvidne.
Selv om den anvendte matematik ofte ligger ud over, hvad eleverne umiddelbart forstår eller har tid til at arbejde dybere med, så må det være en opgave at finde ud af, om fx en ukendt formel kan analyseres, så man kan få indtryk af, på hvilken måde de forskellige indgående størrelser indvirker på beregningsresultatet.

Udvalgte emner og problemstillinger

I det følgende gives eksempler på emner og problemstillinger, hvor matematikken er i anvendelse i undervisningen.

Boligforhold

Allerede tidligt i skoleforløbet kan forhold omkring boligen indgå som et emne i undervisningen. Det er en almen erfaring, at eleverne er meget motiverede for at behandle problemstillinger, som tager udgangspunkt i deres egne boligforhold.
Hvis eleverne senere i skoleforløbet skal danne sig indtryk af, hvorfor vi bor, som vi gør, kan der blive anledning til at undersøge, hvordan vi faktisk bor i by, på land, i Danmark eller uden for Danmark. Der kan give anledning til at se på spørgsmål om hensigtsmæssig boligindretning – evt. sat i relation til traditioner herfor – og om økonomiens betydning. I forsøget på at beskrive og udvikle boliger vil der blive behov for at arbejde med tegning og beregning af areal og rumfang, ligesom der kan foretages overvejelser over økonomiske konsekvenser.
På de ældste klassetrin kan man lægge energibetragtninger ind i opgaven, og der bliver herved behov for at forstå og anvende fysikkens formler til beregningen eller selv udvikle formler.
Emnet kan udvikles, så det inddrager design og arkitektur både med hensyn til brugsredskaber, møbler, bolig og byplan – områder som kan understøtte geometri eller bruge geometri.

Trafik

De små elever kan arbejde med trafikskiltes form og måske forsøge at lave en miniudgave af skolens nære vejnet i skolegården. Eller de kan arbejde med skiltenes betydning for derved at komme til at beskæftige sig med de symboler, der indgår i beskrivelsen af forskellige fænomener i trafikbilledet.
De større elever kan beskæftige sig med emnet trafiksikkerhed. De kan selv foretage undersøgelser eller lære at forstå og fortolke undersøgelser foretaget af officielle organer eller interessegrupper. Hvordan ville eleverne tilrettelægge den offentlige trafik i deres kommune, set ud fra deres egne interesser eller ud fra et sikkerhedsmæssigt synspunkt?

De ældste elever vil kunne overveje generelle trafikforhold: Bygning af broer og motorveje set under økonomiske eller økologiske synsvinkler. Forholdet mellem kollektiv og individuel trafik kan inddrages set i et globalt ressource- og forureningsperspektiv.
I alle disse spørgsmål vil det være undervisningens opgave at se på de kvantitative sider i forhold til de kvalitative sider.
Naturen

I mange af de emner, der gennem hele skoleforløbet kan hentes fra forhold i naturen, findes der oplagte muligheder for at inddrage matematik. Hele dette emneområde kan faktisk karakteriseres ved at have matematik som hjælpedisciplin.
Emner fra naturområdet vil i særlig grad være anvendelige i forbindelse med opbygningen af det størrelsesbegreb, som står centralt i matematikundervisningen. I hele forløbet kan eleverne gennem arbejdet med sådanne emner skabe en grundlæggende forståelse og finde begrundelser for, at de må udvikle, beskrive og definere særlige størrelsesbeskrivelser for så forskellige begreber som længde, flade, rum, vinkel, masse og temperatur – og i den senere del af skoleforløbet – arbejde, kraft, energi, fart og acceleration. For alle disse begreber spiller tallene en afgørende rolle, og ofte vil anledningen til at udvide talområdet findes gennem arbejdet med sådanne områder, hvad enten det handler om geografi, biologi eller fysik/kemi. Gennem dette arbejde kan også opstå behov for at anvende variable, formler, ligninger og funktioner.
Hvis yngre elever skal undersøge vækstbetingelserne for plantefrø ved at give dem forskellige vækstbetingelser, vil matematikken være én af mulighederne, når resultaterne af forsøget skal beskrives. Eleverne kan høste planterne og sammenligne deres længde, men ønsker de ikke at plukke de flotte blomster, så kan de overføre længden til papir ved hjælp af en snor eller direkte måle og beskrive ved tal. Nu vil næppe alle planter med samme vækstbetingelser blive lige lange, hvorved eleverne kan blive nødt til at udvikle beregninger, der svarer til gennemsnit for at foretage sammenligninger.
Arbejdet med størrelsesforhold får en mere kompleks karakter for de større elever, som i geografi arbejder med at forstå de forskellige former for kort og deres tilblivelse. De kan gennem eksperimenter være med til at udvikle den matematik, som anvendes hertil. Det gælder lige fra enkle forsøg på at beskrive skolens grundplan til forsøg på at forstå, hvorledes man på forskellige måder kan gengive den kugleformede jordklode tegnet som sider i et atlas. Andre faglige begreber end størrelse må her bringes i anvendelse.
CKF'et matematik i anvendelse kan siges at være en dialog mellem fagets teoretiske opbygning og den praktiske virkelighed. Det kan imidlertid være meget stor forskel på den vægt, som henholdsvis faglig teori og praktisk anvendelse har i forskellige undervisningsforløb. Modelleringskompetencen er central i dette arbejde, da en matematisk modellering netop er den relation vi etablerer mellem den virkelige verden og matematikken.
Matematik i flerfagligt samarbejde
I forrige afsnit er matematik i anvendelse nævnt flere gange i forbindelse med andre af skolens fag. Og matematik er da også et fag, der skal og kan anvendes i stort set alle andre fag. Derfor er det oplagt at gennemføre flerfaglige forløb, hvor matematik deltager sammen med et eller flere andre fag. Men tit er samarbejdet ikke uproblematisk. I kraft af, at matematik er skolens næststørste fag, bliver matematiklæreren ofte deltager i tværfaglige forløb, hvor matematikken har svært ved at finde sin plads eller bliver lidt kunstigt tilføjet. Hvis der skal være mere balance kræver det, at matematiklæreren er udfarende og inviterer kollegerne i de andre fag ind til et samarbejde mellem fagene, hvor matematik er en vigtig del af arbejdet, og hvor der gives eleverne mulighed for at lære at anvende matematik og samtidig få større faglig indsigt i andre fag vha. matematikken. Ligeledes oplever lærere i andre fag, at de har brug for, at eleverne besidder nogle matematiske kompetencer. Det gælder fx praktiskmusiske fag som sløjd og hjemkundskab.

Når en matematiklærer skal invitere kolleger fra andre fag til samarbejde, skal han selvfølgelig se, hvilke mål for undervisningen i matematik, der er på det pågældende klassetrin, men også i høj grad se på, hvilke muligheder der er for forløb, hvor matematik kan understøtte læringen i andre fag, samtidig med at faglige mål i matematik tilgodeses. Her er nogle få eksempler

Eleverne i 3-4. klasse arbejder med noder i musikundervisningen parallelt med, at der i matematik arbejdes med det indledende arbejde med brøkbegrebet.

Eleverne i en 6. klasse arbejder i historie med læsning af Knud den Helliges gavebrev til Lund Domkirke i 1085. Gavebrevet opremser en lang række gårde, hvis størrelse er beskrevet i brøkdele af måleenheden boel. Opgaven er, at eleverne finder størrelsen af gavens omfang i hektarer og finder værdien af gaven efter nutidens jordpriser. Hermed får eleverne en indsigt i den sidste vikingekonges magt og rigdom samt nære alliance med kirken. Desuden udvikler eleverne deres it-kompetencer, da en del oplysninger skal hentes på internettet.

I en 9. klasse arbejder eleverne med det danske demokratiske system, og i arbejdet indgår matematikken med en gennemgang og analyse af metoderne til mandatfordelingen ved henholdsvis kommunevalg og folketingsvalg.

I hele skoleforløbet arbejder eleverne med forskellige test i idræt samt samler tal for deres præstationer. Materialet bearbejdes statistisk og bruges i den enkelte elevs personlige idrætslogbog.

I forbindelse med arbejdet med tværgående emner og problemstillinger kan det være nyttigt for matematiklæreren at gøre sig klart,med hvilken vægtning mellem teori og anvendelse matematikken indgår i et sådant forløb.

Nedenfor beskrives fem undervisningssituationer, som repræsenterer forskellige grader af anvendelsessiden af faget – helt ud til den situation, som slet ikke direkte inddrager fagets anvendelse.

Der er ikke tale om nogen rangordning af beskrivelserne. I det daglige arbejde i undervisningen vil det ofte være sådan, at det ikke klart kan afgøres, inden for hvilken beskrivelse undervisningen gennemføres. Det vil også kunne forekomme, at en undervisning starter som én type for så at bevæge sig over i en anden.

- Den problemstilling eller det emne, som man ønsker at undersøge og belyse, er af almen karakter, dvs. ikke bestemt af faget matematik. Matematik vil i et sådant tilfælde blive inddraget, når den kan bidrage til at give indsigt i emnet. Eleverne kan vælge at inddrage eller at udelade matematik, men det er som i al anden undervisning lærerens opgave at vurdere kvaliteten af arbejdet. Denne undervisning har ofte karakter af projektarbejde. Kvaliteten ligger i, om matematikken er vel anvendt, og om den er anvendt, hvor den burde være det.
- Et udvalgt område ønskes belyst bl.a. ved hjælp af matematik. Det kan være et særligt samfundsforhold, et naturvidenskabeligt forhold, et økonomisk forhold eller et kulturforhold. Området kan være valgt af læreren, fordi særlige sider af matematikken er særligt oplagte at inddrage i behandlingen af netop dette emne. Arbejdet med emnet og med matematikken har ligeværdige hensigter. Kvaliteten i arbejdet er derfor til stede, hvis eleven forøger sin viden og kunnen inden for både fag og emne.
- Et matematikfagligt emne søges belyst. Arbejdet med faget er den centrale hensigt, og kun de sider af praksis, som belyser den matematikfaglige hensigt, inddrages. Emnet kan fx være vækstfunktionen. Biologiske sammenhænge kan være valgt til eksemplificering, men de biologiske forhold berøres kun i det omfang, de støtter matematikken. Kvaliteten bedømmes i overvejende grad ud fra den opnåede matematikfaglige indsigt.
- Udgangspunktet er at behandle rene matematikfaglige emner som eksempelvis subtraktion, vinkler eller sandsynlighedsbegrebet. Anvendelsessiden benyttes, fx i form af tekstopgaver, udelukkende til illustration af det faglige emne. Dette kan være en støtte for elevens tankegang. Men ofte vil eleven glemme anvendelsen og søge at trække oplysningerne – ofte tallene – ud af sammenhængen

og udføre de forventede regneoperationer eller tegne de krævede diagrammer. Kvaliteten vil blive bedømt på rigtigheden af talresultatet eller tegningen. Refleksioner i forhold til anvendelses siden vil sjældent være meningsfulde.

- Fagets anvendelse er helt udeladt. Hensigten er alene at udvikle forhold, som vedrører matematikken. Også ren træning af matematiske færdigheder kan indgå. Indirekte kan eleverne dog gennem den samlede undervisning have opnået forståelse for, at man må arbejde med at lære at beherske nye faglige områder for at blive bedre til at benytte matematik til løsning af praktiske problemer. Kvaliteten kan vedrøre alle faglige aspekter: kundskaber, færdigheder, arbejdsmåder og udtryksformer.

Matematik i anvendelse giver eleverne redskaber til at forholde sig kritisk til, hvordan medier anvender statistik og sandsynlighed ligesom det giver eleverne mulighed for at erkende matematikkens muligheder og begrænsninger som beskrivelsesmiddel og beslutningsgrundlag. Matematik i anvendelse giver ligeledes eleverne en række redskaber, der kan bruges for at udvikle, beskrive og analysere en bæredygtig udvikling på forskellige områder.

Faglig læsning

Der har i de senere år været megen fokus på, at danske elever skal blive bedre til at læse. Det har tidligere været en opgave, som især dansklærerne har taget sig af, men andre fag skal nu også være med til at løfte opgaven. Faglig læsning er derfor blevet en del af CKF'et *matematiske arbejdsmåder*. I slutmålene står der, at undervisningen *"skal lede frem mod, at eleverne har tilegnet sig kundskaber og færdigheder, der sætter dem i stand til at læse faglige tekster og kommunikere om fagets emner"*. Alle trinmålene berører et aspekt af faglig læsning, så det er et område, der må tænkes ind i hele skoleforløbet.

Med begrebet faglig læsning sættes almindeligvis fokus på at læse for at lære. Men i matematik er der to hovedformål, der kan kalde på faglig læsning. Det ene er det nævnte formål at *lære matematik*. Det andet hovedformål er at kunne læse matematikholdige tekster fra dagligdagen på arbejde, i fritiden, i privatøkonomien og i samfundslivet for at skaffe oplysninger til at løse praktiske problemer vha. af matematik og for at kunne deltage i den demokratiske debat, der ofte rummer matematikrelaterede argumenter.

I folkeskolens lærebøger er begge aspekter med, idet der er udviklet en særlig genre: Lærebøger i matematik for grundskoleelever.

At læse handler dels om at afkode ordene i en tekst, men også om at forstå det læste. Læsning er en aktiv proces, hvor eleven møder matematikteksten med sin forhåndsviden om det givne indhold i teksten. Når elevens forhåndsviden aktiveres, kan der skabes mening og sammenhæng i den læste teksts informationer. En af de faktorer, der har størst betydning for, hvad elever forstår og husker af det læste, er den forhåndsviden, som eleven møder teksten med. Teksten bliver meningsfuld, når eleven formår at knytte indholdet til det, som allerede vides om emnet på forhånd. Dermed bliver det muligt for eleven at danne mentale billeder af det læste. De mentale billeder gør det muligt for eleven at tænke matematik og at udvikle begrebsforståelse.

Det er altså vigtigt, at elevens forhåndsviden aktiveres i mødet med teksten, men det er ikke nok blot at aktivere denne viden, *eleven må også være i stand til at navigere rundt i teksten* og finde sammenhæng mellem informationer på tværs af teksten og at ræsonnere på baggrund af den viden, eleven i forvejen har med sig. For at vælge en hensigtsmæssig læsestrategi til dette er det en hjælp at have *kendskab til genren*. Et væsentligt spørgsmål er derfor, hvad der kendetegner tekster, der handler om matematik? Det er ikke realistisk at forestille sig, at alle matematiktekster kan karakteriseres på samme måde, men der er nogle kendetegn, som elever møder ofte i tekster om matematik.

Et væsentligt træk ved matematiktekster er, at de ofte består af andet end skrevne ord – det er altså tekster, der er *sat sammen af forskellige dele*, fx matematisk symbolsprog, skemaer, tabeller, diagrammer, figurer, "huskekasser", "faktakasser", fotos, tegninger m.m. De skrevne ord kan have forskellige funktioner. Det kan være berettende fortællinger, opgaveinstruktioner, ordforklaringer m.m. Der er vigtige fagudtryk, som eleverne skal kende, men der er også visse ordsammensætninger, som bruges på en bestemt måde i faget. Eksempler kan være “større end”, “mindre end”, “hvis og kun hvis”… Ligeledes har illustrationerne forskellige funktioner. Nogle skal gøre siden læsevenlig, mens andre illustrationer kan indeholde vigtige informationer eller måske ligefrem en instruktion. Det kan altså være et kompliceret, men et spændende landskab at bevæge sig rundt i for eleverne.

Hvis matematikundervisningen tager udgangspunkt i en bestemt matematikbog, kan det være en stor hjælp for eleverne at arbejde med, hvad der kendetegner matematikteksterne i netop denne bog. Det er med til at give eleverne en hensigtsmæssig læsestrategi at være bevidst om, hvordan matematikbogen er bygget op. Det kan være, at bogens kapitler indeholder forskellige sidetyper, at bestemte sider altid er bygget op på en bestemt måde, at vigtige informationer er placeret et bestemt sted osv. Derudover må læreren hjælpe eleverne til at blive bevidste om, at ordene ofte ikke skal læses alene, men skal sammenkædes med en illustration, en tabel, en graf eller lignende, ligesom elementerne kan have forskellig status. Rækkefølgen, de enkelte dele læses i, kan også være væsentlig. I matematiske tekster med figurer, skemaer, tabeller, grafer og lignende skal man ikke nødvendigvis altid læse alle informationerne. Her er det derfor vigtigt at vide, hvordan informationerne er organiseret, så man har mulighed for at finde de informationer, der er vigtige. Det bliver dermed helt centralt at kunne vælge en læsestrategi, der er hensigtsmæssig.

Når eleverne læser i matematik, er hensigten for det meste, at de skal løse en opgave, altså ligner det andet hovedformål med faglig læsning i matematik. For at kunne løse en opgave må man vide, hvad problemstillingen er. Mange lærere møder elever, der spørger: *“Hvad skal man i den her opgave?”* Det kan altså være vanskeligt for elever at identificere, hvad problemstillingen egentlig er!

Her må læreren passe på med ikke altid blot at give elever forklaringer – *hvis eleverne skal udvikle deres kompetence i faglig læsning af matematiske tekster, bliver de nødt til at arbejde med at udvikle hensigtsmæssige strategier.* Læreren kan gå i dialog med eleven om opgaven eller opfordre eleverne til at gå i dialog med hinanden med spørgsmål som: “Prøv at fortælle med jeres egne ord, hvad der står.” “Hvilke oplysninger giver teksten jer?” “Hvor står spørgsmålet henne?” “Hvad får I at vide?” “Kan I lave en tegning af problemstillingen?” Når eleverne med egne ord formulerer sig om problemstillingen, har de mulighed for at danne mentale billeder af problemstillingen og dernæst at vælge en løsningsstrategi, der er hensigtsmæssig. Eleverne må som aktive læsere forholde sig aktivt til problemstillingen – her er det vigtigt at kunne reflektere over problemstillingen, evt. lave et overslag og reflektere over svaret i forhold til spørgsmålet. Eleverne må blive fortrolige med den type af spørgsmål, der stilles i matematik. Det er netop *kernen i tankegangskompetencen*: At stille spørgsmål, som er karakteristiske for matematik og have blik for, hvilke typer af svar som kan forventes.

Et aspekt af faglig læsning i matematik er altså, at eleverne skal lære at overskue og sammenkæde forskellige teksttyper og illustrationer på en side, finde væsentlige oplysninger, bruge dem i problemløsning og reflektere over spørgsmål og svar, men eleverne må et lag dybere endnu, når det handler om læsning af matematik. Matematikken er ofte iklædt fortællinger, illustrationer, symboler m.m., og *disse forskellige dele er forskellige repræsentationer for selve matematikken*.Matematikken opfattes ofte som meget abstrakt, men vi arbejder med den i de forskellige repræsentationer. Det er netop ved at arbejde med flere forskellige repræsentationer af det matematiske begreb og danne relationer mellem repræsentationerne, at eleverne udvikler matematisk forståelse og altså lærer matematik – og *det må være en stor del af formålet med faglig læsning. Repræsentationskompetence* er således helt central i forbindelse med faglig læsning – matematiske tekster kan betragtes som en sammensætning af forskellige repræsentationer. Ud over, at eleverne skal kunne afkode de skrevne ord, har matematikken altså et sprog i sig selv – et univers af repræsentationer, hvor de skrevne ord kan være ét af dem – som eleverne lærer at kende, selv skal udvikle og skal lære at udtrykke sig ved hjælp af.

I situationer, hvor eleverne skal løse et praktisk problem fra "den virkelige verden", skal de ofte læse matematikholdige tekster, der kan sætte dem i stand til at forstå noget af den kontekst, problemet er i, og der giver dem de oplysninger, som sætter dem i stand til at løse problemet vha. matematik, fx ved at opstille en matematisk model.
Faglig læsning i overbygningen vil ofte kræve, at eleverne forholder sig til spørgsmål som:

- Hvad er læseformålet? Fx at lære noget matematik eller at løse et problem, der kræver læsning af matematikholdige tekster.
- Hvad tror du, forfatteren eller opgavestilleren vil have jer til at gøre?
- Hvad ved jeg i forvejen? Både om det emne (praktisk eller matematisk), der skal arbejdes med, og de matematiske begreber der er med i teksten.
- Hvilken læsestrategi skal jeg anvende? Hvilken læsemåde skal jeg anvende?
- Er der nogle fagord, jeg skal have forklaret? Både matematiske begreber og begreber fra teksten vedrørende det praktiske problem. Det kan gøres til "jagten på de svære ord".
- Hvordan skal jeg holde rede på det, jeg læser? Fx notater, tegninger osv.

Ofte vil faglig læsning og problemløsning med fordel foregå i et samarbejde mellem to elever. Faglig læsning i et makkerparsamarbejde kunne foregå efter følgende "opskrift":

- Læs teksten højt for hinanden (læseafkodning)
- Genfortæl teksten for hinanden (læseforståelse)
- Hvad handler teksten om, hvad er opgaven, og hvordan skal den løses? (elementær læsekompetence)
- Tegn et billede af opgaven (mental repræsentation)
- Hvilke løsningsstrategier kan vi bruge, og hvilken skal vi vælge (funktionel læsekompetence og matematisk kompetencer)
- Giv et overslag (hverdagserfaringer og talforståelse)
- Beregn resultatet (matematiske færdigheder)
- Sammenlign resultatet med overslaget og spørgsmålet (refleksion).

Procesorienteret skrivning i matematik

I forlængelse af faglig læsning ligger faglig skrivning. En væsentlig del af udviklingen af elevernes kommunikationskompetence er elevernes formidling af opnåede resultater i en problemløsning, formidling af opnåede indsigter osv. Dette kan ske på mange forskellige måder: Præsentationer i billede og lyd, fremlæggelse i et præsentationsprogram, gennemgang af en opgaveløsning skriftligt, en matematikrapport om et fagligt emne, osv.
I dette arbejde kan der – på linje med danskfagets procesorienterede skrivning – arbejdes med procesorienteret skrivning i matematik. Det vil ofte være knyttet til problemløsning, der skal kommunikeres skriftligt, men er også velegnet i udarbejdelsen af en rapport om et matematisk emne eller en redegørelse for opnået indsigt.
Procesorienteret skrivning hænger altså ofte sammen med *"at arbejde med problemløsning i en proces, der bygger på dialog…"* (slutmål i Matematiske arbejdsmåder). I trinmålene efter 9. klasse står der, at eleverne skal være i stand til at "give respons til andre i arbejdet med matematik, bl.a. ved at spørge aktivt." Og et væsentligt element i den procesorienterede problemløsning er, at eleverne benytter hinanden som sparringspartnere og giver respons på hinandens skriftlige kommunikation omkring problemløsningen. Dette er noget eleverne skal lære gennem en grundig introduktion og med læreren som aktiv deltager i responsfasen i begyndelsen.

Arbejdet med procesorienteret problemløsning i matematik kan ofte med fordel foregå ved hjælp af dynamiske programmer, dvs. programmer, hvor matematikken kan undersøges. En sådan undersøgelse kan bestå i, at der eksperimenteres med forskellige indtastninger, og de forskellige resultater umiddelbart kan ses på skærmen og vurderes. Dynamiske programmer er programmer som regneark, hvor cellerne udnyttes aktivt til at beregne værdier. Det er geometriprogrammer, hvor der kan trækkes og ændres i konstruktionerne, så eleverne kan forsøge sig frem mod en løsning, og det er matematiske skriveværktøjer, hvor formler, funktioner og andre matematiske udtryk kan indtastes og beregnes direkte på skærmen, igen så det er muligt at eksperimentere sig frem mod en løsning. Ofte vil elevernes arbejde i disse programmer også danne grundlag for den skriftlige kommunikation.

Arbejdet med responsen skal tilrettelægges efter den enkelte elevs forudsætninger og vil ofte foregå flere gange i et forløb opdelt i faser. For mange elever er forberedelsesfasen den sværeste. Måske har de en idé, men de har svært ved at få den struktureret og udfoldet. Forberedelsesfasen skal derfor tages alvorligt og prioriteres tidsmæssigt. Forberedelsesfasen veksler mellem at foregå individuelt, i grupper eller fælles i klassen. Flere af elementerne i faglig læsning (se forrige afsnit) vil indgå.

For mange elever er det svært at formulere sig om noget, andre har skrevet, og at modtage kritik på det, de selv har skrevet. De har ofte vanskeligt ved at håndtere kritik og føler, der er meget på spil, når de selv skal give respons til en kammerat. De kan fx savne et sprog at formulere sig i. Læreren bør fokusere på disse situationer og hjælpe eleverne til at udvikle nogle redskaber, der sætter dem i stand til at inddrage responsfasen som en naturlig del af opgaveløsningen. Der kan i starten være konkrete responsspørgsmål, som er formuleret af læreren.

Der eksisterer i hovedsagen to typer af matematiske opgaver. Der er opgaver, der stort set kun består af tal, bogstaver og matematiske tegn, og der er opgaver, der er mere sammensat, med mange data, sproglige forklaringer, billeder og tegninger.

Den første type af opgaver giver sjældent anledning til mange diskussioner om de sproglige forklaringer i forbindelse med opgaven. Er der tale om færdighedsprægede opgaver og deres løsning, drejer diskussionerne sig mere om fx matematisk syntaks, valg af løsningsmetode og valg af, hvordan og i hvilken grad det er nødvendigt at forklare, hvorledes man er nået frem til resultatet. Er der tale om problemer som fx "Skriv 1 6 som summen af to stambrøker? Kan I finde flere? Kan I finde dem alle?" vil diskussionen dreje sig om selve problemløsningen, og den undersøgende arbejdsmåde vil komme i spil.

Den anden type af opgaver omfatter en mere sammensat proces, hvor der ofte skal foretages flere valg. Her skal eleverne forholde sig kritisk til de forelagte data og vide, hvorledes de valg, de foretager, kan have indflydelse på resultatet af de efterfølgende udregninger. Denne proces og de foretagne valg skal tydeligt fremgå af den skriftlige kommunikation omkring problemløsningen. Her er nogle eksempler:

- Valg af lånetype til finansiering af bolig, hvor en lang række af valg har indflydelse på, hvilken type lån der passer til de ønsker, en person har.
- Køb på afbetaling, hvor der skal vælges mellem forskellige afdragsmodeller.
- Lægning af fliser på en terrasse, hvor der kan vælges mellem forskellige flisetyper til forskellige priser, som kan lægges på forskellig tid og i forskellige mønstre.
- Kravene til skriftlig kommunikation omkring sådanne opgavetyper må være, at valg og proces fremgår tydeligt af kommunikationen. Processen vil ofte kunne illustreres ved fx en formel, ligning, funktion, diagram, tabel eller tegning og de tilhørende resultater. Hvorimod valg kræver en forklaring med argumenter for netop dette valg.

I responsarbejdet ligger der gode muligheder for at differentiere. Nogle elever har brug for ganske få, men meget detaljerede kommentarer for overhovedet at komme videre, mens der til andre kan stilles større og mere komplekse forslag til deres opgaveløsninger.

It i matematikundervisningen

It spiller en stadig større rolle i folkeskolens matematikundervisning. Det er der flere gode grunde til.

For det første er det naturligt, at folkeskolen inddrager de redskaber, som er almindeligt tilgængelige til behandling af matematiskeproblemer – på samme måde som lommeregneren nu i mange år har været en integreret del af matematikundervisningen.

For det andet kan it i en række tilfælde støtte elevernes forståelse af faglige begreber – især fordi en række programmer gør det muligt for eleverne at undersøge og eksperimentere med bl.a. geometriske objekter og simuleringer af forsøg, der vedrører tilfældighed.

For det tredje kan it inddrages på hensigtsmæssige måder i elevernes arbejde med kommunikation om og med matematik. Det kan fx være it-baserede medier som tekstbehandling, matematikskriveværktøjer, præsentationsprogrammer, video og lyd og dynamiske geometriprogrammer.

Det er imidlertid ikke sådan, at it kan støtte enhver hensigt med undervisningen. Fx bør det fra forløb til forløb overvejes, hvordan anvendelsen af it harmonerer med elevernes udvikling af alsidige matematiske arbejdsmåder. Det er sjældent en hensigtsmæssig inddragelse af it, hvis det medfører, at eleverne fx kigger passivt på et interaktivt whiteboard.

It anvendes som *hjælpemiddel* i problemløsning og anden opgaveløsning. Med redskaber som CAS-programmer, dynamiske geometriprogrammer, funktionsprogrammer og regneark åbner der sig nye muligheder i arbejdet med matematik. Lommeregneren blev indført i 1976 i folkeskolens matematikundervisning og åbnede for, at eleverne kunne arbejde med anderledes virkelighedsnære problemer med tal, som førhen var uhåndterlige i hovedog papirsregning. På samme måde vil it åbne nye muligheder for elevernes arbejde med matematik. I disse forbindelser kan it opfattes som et hjælpemiddel, eleverne skal udvikle kompetence til at bruge. Et fokuspunkt vil være at arbejde med it på en hensigtsmæssig og kritisk måde, således at både muligheder og begrænsninger inddrages.

Nogle af it-programmerne rummer også mulighed for at blive anvendt som *læringsmiddel*, fx dynamiske geometriprogrammer. En trekant og dens tre vinkelhalveringslinjer kan hurtigt og nemt tegnes. Når eleverne trækker i et vinkelhjørne, kan de se, at de tre vinkelhalveringslinjer tilsyneladende altid skærer hinanden i samme punkt. Hvorfor er det mon sådan? Elevernes undersøgende arbejde kan danne udgangspunkt for overvejelser som denne, som kræver ræsonnementer. Gør opdagelsen af vinkelhalveringslinjernes fælles skæringspunkt det muligt at konstruere trekantens indskrevne cirkel? Hvorfor? Hvordan? Som antydet kan it blive til et redskab i en undersøgende og eksperimenterende arbejdsmåde, der samtidig danner grundlag for ræsonnementer.

Brug af digitalkamera kan bringe virkeligheden ind i klasseværelset til en nærmere matematisk undersøgelse. På en tur til Københavns Hovedbanegård eller Thorvaldsens Museum kan mosaikker fotograferes og senere analyseres og gengives vha. et geometriprogram hjemme i klassen.

It skal også spille en stor rolle i elevernes *kommunikation* af deres arbejde med matematik, både skriftligt og mundtligt. En mundtlig præsentation kan bygges på en it-præsentation, fremvisning af en geometrisk undersøgelse af diagonaler i forskellige typer firkanter i et dynamisk geometriprogram på et interaktiv whiteboard kan dokumentere elevens konklusioner om emnet, en skriftlig redegørelse kan skrives i et matematisk skriveprogram eller et CAS-program.

Eleven kan altså udvikle sin kommunikationskompetence gennem anvendelse af en bred vifte af it og andre medier.

Endelig gør it det muligt at søge matematisk information på internettet og til selv at producere digitalt matematisk indhold til nettet. Informationer til at løse forskellige praktiske problemer med matematik kan ofte let findes på internettet, men det kræver, at eleverne lærer

at forholde sig kritisk til gyldigheden af informationerne. Hvis en elev fx søger oplysninger om prisen på landbrugsjord, vil der dukke flere tusinde hints op. Eleven skal forholde sig til bl.a. årstal, region og bonitet og sætte dette i forhold til den problemstilling, tallene skal anvendes til at løse. Hvis eleven får brug for en bestemt formel eller lignende og søger efter den på nettet, vil det ligeledes give mange hits, men eleven må forholde sig til om en bestemt hjemmeside "virker troværdig" i forhold til det, der søges oplyst.
Programmer kan ofte hentes gratis på internettet og er derved ikke bekostelige at anvende.
Regneark er oprindeligt udviklet som et bogholderiprogram, men har i dag så mange muligheder, at det er blevet attraktivt at anvende i matematikundervisningen. Regnearket er meget anvendeligt til statistik, visse simuleringer, budget og regnskab osv. Regnearket er ikke lige velegnet til tegning af grafer, trigonometriske beregninger mv. Der findes talrige gratis interaktive geometriprogrammer, og selv de mere avancerede matematikprogrammer som CAS-programmer kan findes gratis på nettet.

Undervisningsforløb

Dette hovedafsnit indeholder fem eksempler på undervisningsforløb. Beskrivelserne er eksemplariske i den forstand, at der først og fremmest er lagt vægt på den fagligpædagogiske tankegang. Denne tankegang vil kunne overføres til andre emnefaglige valg og andre klassetrin. Der er eksempler af tre typer:

- Forløb, der går over flere år
- Forløb, der varer i en længere periode
- Korte forløb

"Udvikling af metoder til multiplikation" – et undervisningsforløb i 3.-6. klasse

Hensigten med beskrivelsen er først og fremmest at illustrere, hvordan en klasse kan arbejde med udvikling af metoder til multiplikation – set over flere år.
Forskellige trinmål vedrørende kompetencer og arbejdsmåder kan kobles til dette emne. Modellen herunder viser i stikordsform et eksempel på trinmål, der kan kobles til emnet:

Fra 3. klasse:

Udgangspunktet for arbejdet med multiplikation er de erfaringer, eleverne har med sig hjemmefra, og de erfaringer, de har fået gennem deres arbejde i skolen. Eleverne kan fx forbinde multiplikation med gentagen addition, med spring på en tallinje, med arealet af et rektangel, med forskellige hverdagssituationer eller med opdigtede regnehistorier.
Når eleverne udnytter disse repræsentationer i forbindelse med problemstillinger, der vedrører multiplikation, kan man opleve, at de opdager små "fiduser og genveje" – egne strategier – til beregningerne.

Eksempel:
"Hvad koster 4 liter mælk á 6 kr. tilsammen? Jeg kan huske, at 2 · 6 er
12… Jeg forestiller mig tallinjen… 18…24.", sagde én.
Nogle af elevernes egne strategier kan gøres til genstand for klassens undersøgelser.

Eksempel:
Jonathan: *"8 · 5? Jeg har lige regnet 4 · 5 ved at lægge sammen, 5+5+5+5. Det var 20…"*
"Bliver 8 · 5 så ikke dobbelt så meget?" sagde en anden.
Lærer: *"Jonathan spørger, om 8 · 5 er dobbelt så meget som 4 · 5. Har han ret? Hvorfor? Gælder det også andre gange? Altid?"*
Eleverne har med de forskellige repræsentationsformer, de har kendskab til, forskellige muligheder for at undersøge lærerens spørgsmål – og forskellige muligheder for at argumentere for deres opfattelser.
Eksempler:

"Den ene firkant er jo dobbelt så stor som den anden… Så må 8 · 5 også være dobbelt så stor som 4 · 5!"
"Ja, for når man lægger 5 sammen 4 gange, så plusser man det jo halvt så mange gange, som hvis man lægger sammen 8 gange… Derfor er det dobbelt så stort!"
"Sådan vil det jo altid være, hvis det ene tal i to gangestykker er ens – og hvis det andet tal er dobbelt så stort…"

Fra 4. klasse:

For at udvikle hensigtsmæssige metoder til multiplikation med tal, der rækker ud over den lille tabel, er det nødvendigt, at eleverne har indsigt i multiplikation med tiere og hundreder. En sådan indsigt kan fx opnås ved at lade eleverne undersøge sammenhænge inden for multiplikation med brug af lommeregner:

$3 \cdot 10 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 40 =$

$5 \cdot 10 = 5 \cdot 100 = 2 \cdot 6 = 2 \cdot 60 =$

$8 \cdot 10 = 8 \cdot 100 = 5 \cdot 3 = 5 \cdot 30 =$

$2 \cdot 10 = 2 \cdot 100 = 7 \cdot 2 = 7 \cdot 20 =$

Efterfølgende kan eleverne fortælle om deres opdagelser i klassen. Læreren har i den forbindelse mulighed for at konkludere og præcisere elevernes sprogbrug.

Udviklingen af metoder til multiplikation med "større tal" kan fx indledes med, at eleverne undersøger antallet af kvadrater i et rektangel som det, der er vist herunder. Antallet af kvadrater svarer til resultatet af $15 \cdot 18$. Eleverne må selv bestemme, hvordan de finder det samlede antal – måske er det en fordel for dem at dele rektanglet op i mindre dele.

På næste side vises et par eksempler fra elever, der har arbejdet med opgaven

Ved at lade nogle af eleverne præsentere deres arbejde for hinanden gives der mulighed for, at de "sætter ord på deres tænkning" – hvilket gør tanken stærkere. Der gives også mulighed for, at eleverne lader sig inspirere af hinandens løsningsstrategier. Generelt giver sådanne præsentationer mulighed for at arbejde med elevernes kommunikationskompetence.

Den næste "trædesten" i arbejdet kan være et opgaveark af samme type, hvor der sættes særligt fokus på, at eleverne skal dele rektanglet op, så det bliver så let som muligt for dem at beregne resultatet af gangestykket.

Emils arbejde med "Gange 2"

Evas arbejde med "Gange 2"

Heidis arbejde med "Gange 2"

Her er vist et par eksempler fra elever, der har arbejdet med $14 \cdot 21$:

Lucas' arbejde med "Gange 2"

Bjørns arbejde med "Gange 2"

Bjørns løsningsmetode, der er vist herover til højre, rummer grundlæggende en struktur, som kan genkendes fra de fleste standardiserede algoritmer til multiplikation. Løsningsmetoden rummer få mellemregninger, der kan klares med kendskab til multiplikation med tiere og hundreder og til den lille tabel.

Læreren kan give eleverne mulighed for at bruge denne metode ved at vise den med forskellige eksempler. Eleverne kan i en periode vælge, om de vil bruge denne metode – eller deres egen opdeling.

5.-6. klasse
Ved at illustrere gangestykker som rektangler på ternet papir kan eleverne – evt. på forskellige måder – regne multiplikationsopgaver med "større tal". Næste "trædesten" kan være at opfordre eleverne til at klare beregningerne uden brug af det ternede papir. Resultatet kan fx være som vist herunder:

Cecilie regner 12 · 37

Mikkel regner 12 · 37
På dette tidspunkt har Cecilie og Mikkel, der har regnet opgaverne herover, således opnået en metode, der gør dem i stand til at klare multiplikation med "større tal". I denne metode støtter eleverne sig op ad en billedlig repræsentationsform.
Læreren kan vælge at lade eleverne prøve kræfter med en ren symbolrepræsentation med henblik på at lade eleverne udvikle deres symbolbehandlingskompetence.
Eleverne kan opfordres til at undlade tegningen, hvis de kan undvære den. Resultatet af denne opfordring kan fx se ud som vist herunder.
Illustrationen er en elevs noter til beregningen af 25 · 24:

For nogle elever kan det i denne fase være en fordel at få hjælp til at skrive mellemregningerne på en mere overskuelig måde, fx:
$\underline{15 \cdot 18}$
100
50
80
$\underline{40}$
270
Sammenfatning
Undervisningseksemplet viser, hvordan elevernes deltagelse i udviklingen af metoder til fx multiplikation kan planlægges med fokus på en række "trædesten", der fx kan være:
- Løs gangestykker ved at tælle tern.
- Lav en opdeling, der gør det lettere at bestemme antallet af tern.
- Lav den opdeling, der er mest hensigtsmæssig.
- Løs gangestykker ved at tegne på ternet papir.
- Løs gangestykker ved at tegne på blankt papir.
- Løs gangestykker ud fra tallene alene.

Bemærk, at elevernes færdigheder spiller en central rolle i denne progression. Det vil være en styrke for eleverne, hvis de både arbejder med automatisering af den lille tabel og med indblik i at gange med tiere og hundreder sideløbende med deres udvikling af metoder til multiplikation.
Et modelleringsforløb i indskolingen

Slutmålet for elevernes arbejde med matematisk modellering lyder således:
Undervisningen skal lede frem mod, at eleverne har tilegnet sig kundskaber og færdigheder, der sætter dem i stand til at udføre matematisk modellering og afkode, tolke, analysere og vurdere matematiske modeller.
Arbejdet frem mod dette slutmål omfatter både indskoling, mellemtrin og sluttrin. Spørgsmålet er, hvordan arbejdet frem mod slutmålet kan se ud, når vi taler konkret undervisning i indskolingen? Den følgende beskrivelse af et undervisningsforløb kan give ét ud af mange forskellige svar på dette spørgsmål. Forløbet er gennemført i en 2. klasse.
I planlægningen har lærerne to grundovervejelser. De ønsker på den ene side at gennemføre et længere, tværfagligt forløb, hvor matematik bidrager med de vigtigste faglige vinkler, og på anden side ønsker de, at eleverne skal have mulighed for at reflektere over sammenhængen mellem et stykke virkelighed og de matematiske modeller, som eleverne bruger til at beskrive denne virkelighed med. Lærerne sætter på den måde bl.a. elevernes modelleringskompetence i fokus.
Set i forhold til Fælles Mål kan målene med forløbet i stik ordsform derfor beskrives sådan:

Forløbet strækker sig over to uger med omkring otte lektioner pr. uge. Alt det praktiske arbejde foregår i billedkunstlokalet. Lærerteamet har bestemt, at arbejdet skal handle om at lave modeller af skolegården, hvor det er elevernes tanker og drømme, der er i fokus. I dette eksempel er der altså tales om fysiske modeller. Det skal understreges, at modellering i indskolingen ikke nødvendigvis vedrører fysiske modeller. Modelleringsarbejdet kan i andre forløb lige så vel føre til fx regneudtryk, diagrammer eller tegninger.
Skolegården trænger til fornyelse. Den har ingen legeredskaber eller steder, hvor man kan gemme sig og være alene. Skolegården er delt op i to dele – “Store gård” og “Stille gård”. “Store gård” til de mere voldsomme lege som fx boldspil og fangelege. “Stille gård” er et sted, hvor man kan hygge sig. “Stille gård” er delt op på langs af en beskyttelsesbunker med jord ovenpå.
Inden klassen går i gang med arbejdet, har de allerede arbejdet med “set fra oven”-tegninger. Eleverne har opmålt og tegnet klasseværelset “set fra oven”, og de har tegnet inventar på tegningen, så godt det kan lade sig gøre. Lærerne har introduceret en tændstik som en miniatureudgave af en meterstok, så eleverne kan bruge den til at tegne tingene i det rette målestoksforhold på tegningen.

Idéfase

Selve skolegårdsforløbet begynder med en idéfase, hvor eleverne kommer med idéer til, hvilke funktioner en legeplads skal have. Tavlen er delt i to dele. På den ene del skal eleverne komme med forslag til, hvad man skal kunne lave i en skolegård (fysisk rum), og på den anden skal eleverne komme med forslag til, hvordan man kan have det i en skolegård (psykisk rum).
Eleverne i 2. klasse har som de vigtigste forslag, at de skal kunne spille bold og lege fangelege, men også, at der skal være plads til at hygge sig nogle få sammen eller alene.
Lærerne har på forhånd målt skolegårdene op og tegnet dem i et passende målestoksforhold på A2- papir. Samtidig har de lavet målepinde af lister i 10 mm bredde og tilpasset målestoksforholdet, så de svarer til 10 m og underdelt i 1/10 “meter”. På den måde har eleverne hele tiden en fornemmelse af, hvordan deres tegnede model passer med virkelighedens verden, hvilket er et af hovedformålene med forløbet.
Når eleverne diskuterer størrelsen af en ting, kan de hurtigt måle efter med en rigtig meterstok for at se, om det matcher deres idéer om størrelsen af fx et legestativ.
Det er svært for nogle af eleverne i 2.klasse at se den tredimensionelle virkelighed i en tegning i to dimensioner og flere har lyst til at folde legeredskaberne ud i 3 dimensioner. Spørgsmål om, hvad man kan se på en “set fra oven”-tegning, melder sig automatisk.

"Hvordan kan man finde ud af, hvor højt klatrestativet er?"
"Hvordan kan vi tegne, så man kan se skolegården fra flere sider?".
Hele tiden gør elever og lærere sig tanker om modellens anvendelighed i forhold til det stykke virkelighed, de ønsker at beskrive.

Arbejdsfasen

Eleverne har på forhånd medbragt ispinde, dåser, paprør, emballage og andre "gamle sager".
Herefter begynder arbejdsfasen, hvor eleverne skal få deres tegnede model af skolegården til at udfolde sig i et tredimensionelt univers. Ikke nogen let opgave for en elev i anden klasse.
Børnene bliver delt ind i grupper på 3-4 børn, og udstyret med hammer, søm og limpistol går de i gang med at lave modeller af skolegården på 9 mm spånplade. Undervejs melder spørgsmål om sammenhængen mellem model og virkelighed sig hele tiden.
"Hvor stort skal fodboldmålet være på modellen? Hvor stort er det i virkeligheden?"
Børnene har et stort ønske om at bruge de ting, de har medbragt hjemmefra, men det giver automatisk nogle "problemer" med størrelsesforholdet. En elev ønsker at bruge et paprør fra en køkkenrulle til en rutsjebane.
Lærer: *"Hvor stor bliver din rutsjebane i virkeligheden, og hvor højt oppefra kører den?"*.
Elev: *"Jamen, så bliver den jo tre meter bred (diameter) og 19 m lang… på vores model starter man i 10 meters højde" … "det er farligt, det er det samme som 3. sal, tror jeg"*.
En anden gruppe ville bruge en kokosnøddeskal som gynge.
"Den bliver 3,5 m i virkeligheden… det er en kæmpe gynge… den bliver tung".
Eleverne arbejder cyklisk med at komme med modelforslag, som de "oversætter" til virkeligheden, og gør sig overvejelser over, om modellen er realistisk.

Evalueringsfasen

I en modelleringsproces gør man sig i denne fase ofte overvejelser over modellens anvendelighed til det, man ønsker at beskrive, og om den matematiske modelbygning har vist sig anvendelig til det formål, man havde med arbejdet. Det er naturligvis svært for elever i anden klasse, så lærerne vælger at invitere forældrene og elever til fernisering af udstillingen af modellerne for på den måde at evaluere forløbet. Arrangementet foregår som et caféarrangement, hvor eleverne fortæller om deres model til dem, som kommer forbi. Samtidig har alle mulighed for at se de tekster, eleverne har skrevet undervejs i forløbet, om "Min værste dag på en legeplads". Nogle elever vælger at skrive brev til skolebladet og til ledelse, skolebestyrelse og skoleborgmester, hvor de søger om penge til indretning af en ny legeplads.

Drikkevarer – et kort forløb i 5. klasse

Nedenstående beskrivelse er et eksempel på, hvordan problemstillinger fra elevernes hverdagsliv kan være udgangspunkt for et undervisningsforløb, hvor eleverne får mulighed for at udvikle metoder til – og øve sig på – at multiplicere decimaltal og brøker med hele tal og blive fortrolige med regnehierarkiet og anvendelse af parenteser. Undervisningsforløbet lægger især op til, at eleverne udvikler deres symbolbehandling samt ræsonnementsog problemløsningskompetencer.

Undervisningsforløbet handler om forskellige emballager til drikkevarer. Inden starten på undervisningsforløbet indsamles forskellige typer emballage til drikkevarer. De konkrete emballager kan evt. erstattes af tegninger. Der skal være eksempler på emballager af flere forskellige størrelser, fx 1,5 liter cola, 1 liter mælk, 0,7 liter saft, 0,5 liter kildevand, 0,3 liter juice og 0,25 liter mælk.
Som indledning drøftes i klassen, hvor meget væske de forskellige slags emballager kan rumme, og resultaterne noteres. Både brøknotation og decimaltalsnotation kan anvendes, og der kan arbejdes med sammenhængen mellem de to notationsformer. Ud fra konkrete situationer kan eleverne diskutere, hvilken notationsform, de synes, der er bedst at anvende i forskellige situationer.

Eleverne kan også arbejde med beregning af væskeindholdet ud fra spørgsmål som:
Hvor mange liter er der i 4 store flasker cola? 10 flasker kildevand? 6 brikker juice? osv.
Ud fra en opstilling eller en tegning som nedenstående kan eleverne arbejde med forskellige problemstillinger:

Opgaverne kan følges op med andre opgaver, hvor symbolsproget skal afkodes.
På hylderne i køleskabet ligger drikkevarer med følgende rumfang:
Hylde 1: (3 · 0,7 L) + (5 · 0,5 L)

Hylde 2: (2 · 1,5 L) + (2 · 1 L) + (8 · 0,3 L)

Hylde 3: (8 · 0,5 L) + (2 · 0,25 L) + (3 · 1 L) + (3 · 1,5 L)

- *Hvilke drikkevarer ligger der på de tre hylder i køleskabet?*
- *Hvor ligger der mest sodavand? Mælk? Kildevand?*
- *På hvilken hylde ligger der mest væske?*

Der er mange muligheder for at udbygge undervisningsforløbet med andre problemstillinger. Eleverne kan fx undersøge, hvor meget skolemælk en 2. klasse drikker en tilfældig dag.
I forbindelse med planlægningen skal læreren overveje, hvilke kompetencer, hvilke faglige emneområder og hvilke arbejdsmåder der i særdeleshed bliver udfordret og kan inddrages i undervisningsforløbet. Det er en god idé at få overblik over differentieringsmulighederne i de stillede opgaver, således at alle elever gennem dialog og samarbejde kan blive udfordret netop på deres niveau.
Kompetencefaglige tilgange:
Problembehandlingskompetencen kommer i spil ved, at eleverne skal løse matematiske problemer knyttet til en kontekst – i dette tilfælde forskellige drikkevarer. Der gives mulighed for intuitiv tænkning og valg af forskellige repræsentationer, når rumindholdet skal noteres og beregnes.
Symbolbehandlingskompetencen inddrages ved, at eleverne kommer til at arbejde med både brøknotation og decimaltalsnotation og deres indbyrdes sammenhæng, men kompetencen udfordres i særdeleshed, når eleverne skal skrive og afkode regneudtryk.
Emnefaglige tilgange:
I arbejdet med problemstillingerne får eleverne brug for at kunne addere eller multiplicere decimaltal og/eller brøker med hele tal. Viden om regnehierarkiet bliver ligeledes inddraget.

Arbejdsmåder
Elverne arbejder med udvikling af metoder til beregning inden for addition af brøker og decimaltal og multiplikation af disse med et helt tal.
Eleverne arbejder individuelt og sammen med andre om praktiske og teoretiske problemstillinger og problemløsninger.
Diagonaler – et kort forløb i overbygningen
Følgende oplæg er tænkt til elever i overbygningen. Det handler om diagonaler i firkanter. Nogle elever i en 8. klasse vil stadig være usikre med hensyn til begreber og sprog i forbindelse med geometriske figurer. For dem vil det vigtige være at få styr på de forskellige typer af firkanter og på egenskaber ved diagonalerne i forskellige firkanter. Andre elever er parate til at udvikle generaliseringer og ræsonnementer inden for området. Alle vil de kunne gå i gang med at arbejde ud fra følgende oplæg:
Elevoplæg:
Alle firkanter har to diagonaler. Her er tegnet fire firkanter med deres diagonaler:

Her er fire udsagn om firkanters diagonaler:

1. Diagonalerne er lige lange.
2. Den ene diagonal går gennem den anden diagonals midtpunkt.
3. Diagonalerne skærer hinanden på midten.
4. Diagonalerne står vinkelret på hinanden.

- Undersøg, om nogle af udsagnene passer på diagonalerne i de tegnede firkanter.
- Kan I tegne en firkant, hvor alle fire udsagn er sande?
- Kan I tegne en firkant, hvor netop tre af udsagnene er sande?
- Kan I tegne firkanter, hvor netop to udsagn er sande?
- Kan I tegne firkanter, hvor kun ét af udsagnene er sandt?
- Kan I tegne en firkant, hvor ingen udsagn passer?

Læreren har besluttet, at eleverne skal arbejde med følgende trinmål inden for geometrien:

- *at kende og anvende forskellige geometriske figurers egenskaber*
- *at benytte grundlæggende geometriske begreber, herunder … linjers indbyrdes beliggenhed*
- *at arbejde med enkle geometriske argumenter og beviser*

Men det vil også være oplagt at inddrage et dynamisk tegneprogram i arbejdet, så eleverne hele tiden kan undersøge, hvordan det går med diagonalerne, når firkanten skifter udseende. Derfor vil også følgende faglige mål inddrages:

- *at bruge it til tegning, undersøgelser, beregninger og ræsonnementer vedrørende geometriske figurer*

Hensigten er også, at eleverne skal arbejde undersøgende, så de selv finder ud af og formulerer nogle af de sætninger, der er knyttet til firkanter og deres diagonaler. Trinmål fra arbejdsmåder, der er i fokus, er derfor

- *at undersøge, systematisere og ræsonnere med henblik på at generalisere.*

Forskellige trinmål vedrørende kompetencer er centrale i dette emne. Da dialogen er helt afgørende i det undersøgende arbejde vil læreren stille krav om, at to til tre elever skal være sammen om at løse opgaven. *Kommunikationskompetencen* er i spil. Det bliver ved hjælp af dialogen, at eleverne får afklaret, hvad de forskellige firkanter hedder, og hvordan diagonalerne ligger, og hvilke egenskaber der knytter sig til dem.

Læreren er selv undersøgende i sit arbejde med at planlægge undervisningen. Han tegner i et dynamisk geometriprogram og opdager derfor nogle af de ting, der senere skal blive hans redskaber i den dialog, han har med eleverne i selve undervisningen. I begyndelsen tegner han forskellige firkanter og deres diagonaler, rykker rundt på dem og finder nogle eksempler på løsninger. Men på et tidspunkt opdager han, at det bliver lettere for ham at være systematisk, hvis han først tegner diagonalerne og bestemmer, om de skal skære hinanden på midten eller stå vinkelret på hinanden, eller… Han opdager gennem sit eget arbejde med problemløsning, at der er mulighed for at udfordre elever ved hjælp af kompetencerne. Han får idéer til, hvilke kompetencer, han vil lægge vægt på, og han opdager, hvordan netop de kompetencer kan hjælpe ham til at stille "gode spørgsmål" til eleverne og finde udfordringer til dem. Han beslutter sig for at have fokus på

- *tankegangskompetencen*
- *ræsonnementskompetencen*
- *kommunikationskompetencen*
- *hjælpemiddelkompetencen (især dynamisk geometriprogram).*

Modellen herunder viser i stikordsformde samlede trinmål, han har valgt.

For mange elever er det svært overhovedet at finde meningen med en opgave som denne. Det er svært at finde ud af, hvilken slags spørgsmål man kan stille. De arbejder med *tankegangskompetencen*, når de arbejder med spørgsmål som:

- Hvad er det nu lige, en diagonal er?
- Hvorfor spørges der sådan i opgaven? Hvad er det egentlig, det her handler om?
- Hvad er definitionen på et parallelogram?
- Og hvad er forskellen på en rombe og et parallelogram?

Når de først har fundet ud af, hvad problemet går ud på, arbejder de med at finde frem til firkanter, der opfylder 4, 3, 2, 1 eller ingen af udsagnene, og de prøver at finde argumenter, ofte på forskellige niveauer. De er *problemløsende og ræsonnerende* i denne fase. Nogle af dem vil finde frem til, at det er diagonalerne, der er det bærende i problemløsningen, så dem kan de prøve at tegne først med de forskellige egenskaber og så bagefter se, hvordan firkanterne kommer til at se ud.

I arbejdet kommer de ud for at skulle formulere sætninger som fx: "Hvis diagonalerne står vinkelret på hinanden, så vil...". I opgavens løb kan det blive til en erkendelse af generelle sammenhænge, som kan danne baggrund for egentlige definitioner og sætninger. Eleverne kan – med lærerens hjælp – opdage, hvordan særlige egenskaber ved diagonalerne giver en rombe, mens andre giver en dragefirkant.

I arbejdet med *ræsonnementkompetencen* vil en række udsagn kunne være i spil, fx:

- *"Hvis diagonalerne skærer hinanden på midten, så er firkanten et parallelogram. Den er måske også et rektangel, men så skal diagonalerne også være lige lange."*
- *"Jeg prøver at tegne diagonaler, der opfylder to af de fire egenskaber. Men jeg kan jo ikke sige nej til det andet udsagn og ja til det tredje! Det kan jo ikke lade sig gøre, at den ene ikke går gennem den andens midtpunkt samtidig med, at de skærer hinanden på midten!"*

Eleverne vil argumentere for, hvorfor ét eller flere af udsagnene passer på en given firkant, og de vil prøve at forstå, hvorfor andres argumenter holder eller ikke holder.
Hvis eleverne tidligere er blevet præsenteret for mange forskellige hjælpemidler, vil de måske selv kunne komme i tanke om at anvende fx sømbræt sammen med det dynamiske geometriprogram.
På et sømbræt kan synliggøres, at diagonalerne står vinkelret på hinanden ved at placere to elastikker på sømbrættet, hvorefter eleverne kan afgøre, om nogle af firkantens sider er lige lange. De kan prøve, om det gør en forskel, hvis den ene diagonal går gennem den andens midtpunkt. Med dette som udgangspunkt kan de gøre yderligere overvejelser, som de ellers ikke kunne magte. Det dynamiske geometriprogram er yderligere et godt redskab til at undersøge de forskellige kombinationer af muligheder for diagonalerne. Eleverne får en mulighed for at lade tanke og handling spille sammen, og de kan hurtigt ændre deres tegning, når de får en idé.
Differentiering vil være mulig inden for flere af trinmålene til denne opgave. Dels i den grad af sproglig præcisering, som den enkelte vil kunne magte, dels i forskellige konkretiseringer af problemformuleringer og -løsninger. Nogle elever kan synliggøre, at diagonalerne står vinkelret på hinanden ved at placere to elastikker på et sømbræt, lige lange eller ikke lige lange. Med dette udgangspunkt kan de måske gennemføre ræsonnementer, som de ikke kunne magte sprogligt, hvis ikke den konkrete handling med elastikkerne var en del af arbejdet.
Andre kan sprogligt formulere problemer som fx: "når jeg sætter elastikkerne vinkelret på hinanden, får jeg en dragefirkant, men mon jeg altid får det, når diagonalerne står vinkelret på hinanden?" Den slags præcise sproglige problemformuleringer vil kunne undersøges i det dynamiske geometriprogram og føre til en generalisering.
Differentieringen vil også blive synlig i elevernes indbyrdes argumentation. Måske har en elev en intuitiv forståelse for en bestemt delopgave, som han ikke kan få accepteret af de andre. Hans eneste mulighed for "at vinde" dialogen er at forbedre sin argumentation. Her vil både den formulerende og den ikke-formulerende kunne få et udbytte af dialogen. Det er ikke blot en dygtig, der trækker en svag med, men det er en dygtig, som bliver klar over, at det sproglige udtryk ikke er præcist nok til at kunne være en forståelig forklaring for andre.
Det vil naturligvis være over flere timer, at eleverne vil kunne arbejde med denne problemstilling. I en 8. klasse kunne det fx være 4 lektioner, der var afsat til det. Læreren kan også vælge at bygge endnu mere geometri op på denne opgave og lade forløbet strække sig over længere tid.
Opgaven kan også udbygges med at arbejde med diagonaler i en vilkårlig polygon, hvor eleverne finder antallet af diagonaler i en polygon.
Nogle elever kan udfordres til at undersøge, om følgende passer og hvorfor:
Arealet af et kvadrat kan findes som det halve af produktet af diagonalernes længde.

"Afstande der ikke kan måles" – et undervisningsforløb

Hensigten med beskrivelsen af dette undervisningsforløb er først og fremmest at illustrere, hvordan konkrete problemstillinger kan være omdrejningspunkt i en undervisning, hvor der lægges vægt på, at eleverne får mulighed for at undersøge, systematisere og ræsonnere med henblik på at skabe viden om centrale matematiske begreber som ligedannethed og emner som den pythagoræiske læresætning og trigonometri. I den beskrevne undervisning fokuseres der desuden specielt på elevernes udvikling af problembehandlings-, ræsonnements- og hjælpemiddelkompetence.
De mål, som "spiller sammen" i undervisningsforløbet, er her illustreret i stikordsform ved hjælp af lærerens tænkebobler:

De konkrete problemstillinger, der er forløbets omdrejningspunkt, vedrører afstande, der ikke umiddelbart kan måles.

Som det første oplæg præsenterer læreren følgende problemstilling:
Min nabo skal have bygget skråt tag på sit hus. Han har bedt mig om hjælp. Husets loft skal være 3 meter, men hvor lange tagspær skal han købe?

Klassen diskuterer problemstillingen for at sikre, at alle ved, hvad det drejer sig om. Nogle kommer med gæt på, hvor lange tagspærene skal være:
"Jeg gætter på omkring 7 meter."
"Jeg gætter på 6,5 meter."
"De skal jo i hvert fald være længere end 5 meter… For halvdelen af loftets bredde er 5 meter."
"Vi skal også huske det lille stykke, der stikker ud over kanten."
Læreren skriver de forskellige gæt på tavlen og præciserer problemstillingen. Samtidig bruger han lejligheden til at genopfriske de matematiske begreber, som er centrale i sammenhængen.
Er I enige i, at hvis vi ser bort fra udhænget, så har vi en retvinklet trekant? Vi kender længden af de to kateter, men vi kender ikke længden af hypotenusen.

En af eleverne foreslår, at de tegner sig frem til en løsning – i stedet for meter skal de bare tegne cm. Det giver en anledning til at genopfriske begrebet *ligedannet trekant* og *målestoksforhold*, og da eleverne kommer med deres bud på baggrund af deres tegnede modeller, diskuterer klassen, hvor stor *usikkerhed* der er i deres resultater.
Kender du det rigtige resultat? spørger eleverne – og læreren fortæller, at han kender en sammenhæng mellem kateternes længder og hypotenusens længde i en retvinklet trekant, som gør, at han kan regne sig frem til det rigtige resultat.
Dette er oplægget til, at eleverne "går på jagt" efter en sammenhæng mellem kateternes længder og hypotenusens længde i retvinklede trekanter – og undervisningen flytter sig på den måde for en periode over i en undersøgelse af teoretisk art. Findes der en generel sammenhæng mellem sidelængderne i retvinklede trekanter?
Eleverne introduceres for de navne, der oftest knyttes til en retvinklet trekants sider og vinkelspidser, så de lettere kan tale om disse.

De tegner så mange retvinklede trekanter, de kan nå, ved hjælp af et geometriprogram inden for en aftalt tidsramme. Ved hjælp af programmet undersøger de trekantens sidelængder, som de bruger til at udfylde et skema.
På lærerens opfordring udnytter eleverne skemaet til at se efter sammenhænge. Nogle elevgrupper har brug for et hint til at se den sammenhæng, mens andre opdager den hurtigt selv. For nogle elever er det en støtte, at udtrykkene a, b og c kan repræsenteres geometrisk ved hjælp af geometriprogrammet eller med en almindelig tegning.

På lærerens opfordring udnytter eleverne skemaet til at se efter sammenhænge. Nogle elevgrupper har brug for et hint til at se den sammenhæng, mens andre opdager den hurtigt selv. For nogle elever er det en støtte, at udtrykkene a^2 , b^2 og c^2 kan repræsenteres geometrisk ved hjælp af geometriprogrammet eller med en almindelig tegning.

Opdagelsen skal skrives på en planche, der skal hænge i klassen. Eleverne diskuterer derfor, hvordan de kan beskrive sammenhængen præcist. De slår op i opslagsbøger for at se, hvordan sammenhængen er beskrevet dér – og bliver på den baggrund enige om følgende formulering:

Læreren problematiserer imidlertid resultatet. Kan vi være sikre på, at det altid gælder? Vi har jo kun prøvet med nogle retvinklede trekanter – og vi kan vel ikke prøve med uendeligt mange!?
Denne problematisering bliver anledningen til, at eleverne arbejder med et geometrisk bevis for Pythagoras´ læresætning. Efterfølgende kan de vende tilbage til den oprindelige problemstilling med tagspærenes længder og beregne sig frem til et resultat. De kan også behandle lignende problemstillinger med "afstande, der ikke kan måles", når det drejer sig om en retvinklet trekant med to kendte sidelængder.
Når problemstillingen vedrører en retvinklet trekant, hvor kun en sidelængde er kendt – eller andre typer trekanter – har eleverne imidlertid ikke redskaber til at beregne afstande, der ikke kan måles. Undervisningen fortsætter derfor med undersøgelser, der skal give eleverne kendskab til forholdene mellem længden af ensliggende sider i ensvinklede trekanter. Eleverne opnår dette kendskab gennem arbejdet med følgende to arbejdskort:

Viden om forhold mellem sidelængder i ensvinklede trekanter danner baggrund for at kunne behandle nye problemstillinger vedrørende afstande, der ikke kan måles.
Eleverne arbejder i grupper med disse problemstillinger, der præsenteres i det følgende. Forløbet afsluttes med, at hver gruppe præsenterer deres arbejde med opgave 14 fra de følgende arbejdskort. Fremgangsmåder og resultater sammenlignes og diskuteres i klassen.
Elevgruppernes præsentation af deres arbejde udgør samtidig en del af forløbets evaluering, der suppleres med, at hver enkelt elev udarbejder en kort rapport, hvor de giver eksempler på, hvordan de kan finde "afstande, der ikke kan måles".
Gruppernes præsentationer og de enkelte elevers rapporter giver læreren mulighed for at få indblik i hver enkelt elevs faglige udvikling med hensyn til både de kompetencer, de emner og de arbejdsmåder, der var i fokus i forløbet.

Dragen

En dreng sætter en drage op.
Han har en rulle snor på 20 meter.
På et tidspunkt kan dragen ikke komme højere op, for drengen har rullet snoren helt ud.
Snoren ligner nærmest en ret linje. Det kan måles, at vinklen mellem snoren og den stiplede vandrette linje på skitsen er ca. 40 grader.
Hvor højt mon dragen flyver?

1) Vis, hvordan I løser opgaven ved hjælp af papir, blyant, vinkelmåler og lineal.
2) Vis eller forklar, hvordan I løser opgaven ved hjælp af et geometriprogram.
Herunder er tegnet en skitse af en trekant, der er ligedannet med trekanten på dragetegningen. På trekanten står der nogle oplysninger om sidelængder.

3) Vis, hvordan I løser opgaven med dragen ved hjælp af oplysningerne og en lommeregner.
4) Fik I det samme resultat med de tre løsningsmåderne? Hvorfor/ hvorfor ikke?
I tabellen er der tegnet skitser af nogle retvinklede trekanter, hvis længste side er 1 cm.
Sådanne trekanter kaldes *enhedstrekanter*.
Brug oplysningerne fra enhedstrekanterne til at løse opgaverne længere nede på siden.

5) Hvor højt flyver dragerne?

6) Hvor højt flyver dragen, hvis vinklen mellem den stiplede vandrette linje og dragesnoren er 90 grader?
Måske har I opdaget, at oplysninger om enhedstrekanter kan gøre det muligt at finde sidelængder i retvinklede trekanter, der er ligedannede med enhedstrekanten – som i opgaverne med dragerne.
Hvis man har oplysninger om forskellige enhedstrekanter, kan man bruge oplysningerne til at løse opgaver. På forrige side findes oplysninger om nogle af enhedstrekanterne.
7) Brug et geometriprogram til at lave flere enhedstrekanter. To af dem skal have vinklerne 100 og 300. Mål længden af den side, der ligger over for vinklen.
8) Brug dine enhedstrekanter til at løse opgaverne herunder
Hvor højt oppe er flyet?

Hvor højt oppe er bilen?

EKSTRA
9) Find selv på en lignende opgave. Kan I finde en opgave, hvor svaret er 100 meter? Kan I finde på flere forskellige opgaver, hvor svaret er 100 meter?
Heldigvis har andre mennesker lavet tabeller med enhedstrekanter, som vi kan bruge til at løse opgaver, hvor man skal beregne sidelængder i trekanter.
De har dog ikke tegnet alle enhedstrekanterne. De har valgt at kalde længden af den side, der ligger overfor en bestemt (ikke ret) vinkel for *sinus* til vinklen.
Tegningen herunder viser, at sinus til 40° er ca. 0,64.

10)

- sinus til 10°?
- sinus til 20°?
- sinus til 30°?
- sinus til 40°?

11) Her ses et udsnit af en sinustabel:

Grader	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°	26°
Sinus	0,3090	0,3256	0,3420	0,3584	0,3746	0,3907	0,4067	0,4226	0,4384

12) Brug tabellen til at løse opgaven herunder:
Hvor højt oppe er bilen?

Hvor højt oppe er flyet?

Du kan også finde sinusværdier ved hjælp af en lommeregner eller en computer.
13) Find:

- sinus til 40°
- sinus til 45°
- sinus til 50°
- sinus til 55°

14) I London ligger verdens største pariserhjul. Det hedder “London Eye”. Hjulet har en radius på ca. 67 meter.
Passagerne sidder i de lukkede gondoler, I kan se på billedet.
Undersøg, hvor højt oppe nogle af gondolerne er.